Un matemático
al servicio de la física

Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} (a_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k t}{T})$$

GENIOS
de las
MATEMÁTICAS

Un matemático
al servicio de la física

Fourier

RBA

© 2017, José María Almira por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Joan Pejoan
Fotografías: Album: 25ai, 53, 86, 117d; Archivo RBA: 19, 25ad, 25b, 60, 85ad, 95ai, 95ad, 95bi, 95bd, 117i; Getty Images: 85ai, 149ai; Shutterstock: 55, 85b, 149ad, 149b.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9111-0
Depósito legal: B 19460-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 El despertar de un nuevo mundo 15

CAPÍTULO 2 Un debate acalorado 47

CAPÍTULO 3 La teoría analítica del calor 89

CAPÍTULO 4 El legado de Fourier 121

LECTURAS RECOMENDADAS 153

ÍNDICE 155

Introducción

Partiendo de un problema físico extremadamente concreto, el estudio de la distribución del calor en sólidos conductores, al cual dedicó prácticamente toda su vida académica, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) introdujo un conjunto de ideas novedosas en el análisis matemático del momento cuyo impacto alcanza de lleno incluso hoy. Es más, dicho impacto es hoy mayor que nunca, pues está implícito en los numerosos avances tecnológicos de los que dependemos cada vez más. Todo el desarrollo de las telecomunicaciones se basa en el análisis de Fourier. Lo mismo sucede con numerosos avances médicos, como las diversas técnicas que existen para el diagnóstico no invasivo basado en imágenes médicas como los TAC, los MRI o los PET, así como el estudio cuantitativo del electroencefalograma, basado, en gran medida, en su análisis espectral. La astronomía utiliza técnicas de espectrometría que se fundamentan en fenómenos como la difracción de Fraunhofer, al utilizar dispositivos físicos que calculan, con lentes, la llamada «transformada de Fourier» de una imagen, y que permiten realizar afirmaciones sobre, por ejemplo, la composición de las estrellas y los planetas. También se utilizan ideas que tuvieron sus inicios en el trabajo de Fourier en áreas tan diversas como la geología —para la detección de bolsas de petróleo mediante fenómenos ondulatorios—, la química —donde la cristalografía es extremadamente importante—, la biología molecular —para el estudio del ADN, o de las proteínas—,

el procesado y la codificación de imágenes digitales —que tiene importantes aplicaciones en áreas tan diversas como la robótica, la medicina, la identificación de objetivos militares a través del análisis de imágenes por satélite, o el almacenamiento de huellas digitales—, etcétera.

El análisis de Fourier nació como disciplina el 21 de diciembre de 1807, cuando el matemático francés presentó ante la Academia de Ciencias de París su *Sobre la propagación del calor en sólidos*. El objetivo de la memoria era estudiar la propagación del calor en un conductor, bajo diferentes hipótesis. La solución de este problema quedaba fuera del dominio de la mecánica racional y la mecánica celeste, por lo que para avanzar en ella fue necesario introducir nuevas técnicas en el planteamiento de los problemas de la física matemática del momento, inaugurando un nuevo campo de estudio. Fourier dedujo las ecuaciones diferenciales que modelan el fenómeno de conducción del calor, esclareció el uso de condiciones de frontera, así como condiciones iniciales para este tipo de problemas e, inspirado por las ideas que había introducido tiempo atrás Daniel Bernoulli (1700-1782) respecto al problema de la cuerda vibrante, propuso la solución de estos problemas físicos mediante el método de separación de variables, que él mismo introdujo. Esta técnica pasaba por descomponer cualquier función periódica con período dado como superposición de ondas sinusoidales —curva que representa gráficamente la función seno—, y una de las aportaciones claves de Fourier fue proporcionar una expresión explícita para los coeficientes que definen la contribución a la suma de cada vibración básica, afirmando la validez de su expresión para funciones «arbitrarias». Precisamente en este punto surgieron las primeras dificultades, porque los miembros de la Academia que juzgaban la memoria no estaban de acuerdo con muchos de los argumentos que contenía, pero tampoco tenían argumentos convincentes que desmontaran las teorías de Fourier probando que estaba equivocado. Más bien sucedía exactamente lo contrario: los teoremas contenidos en la memoria, cuando conducían a cálculos concretos, encajaban a la perfección con las observaciones experimentales. Todo esto provocó una agitada discusión que se mantuvo álgida hasta casi la muerte de Fourier,

en 1830. Durante el debate, Fourier redactó varias memorias en las que poco a poco fue perfilando sus ideas, y que culminaron con la publicación, en 1822, de su obra más importante, la *Teoría analítica del calor*, en las *Mémoires de l'Académie* (*Memorias de la Academia*), publicación de la Academia de Ciencias francesa. Para entonces, Fourier ocupaba el puesto de secretario perpetuo de la institución y, aunque el debate aún seguía abierto, ya gozaba del respeto de sus adversarios. Esta obra se considera una pieza clásica en física, y su prólogo, escrito en un lenguaje muy evocador, es una reconocida joya de la literatura científica universal. De hecho, a Fourier se le considera uno de los fundadores de la física matemática precisamente por esta contribución.

Fue en 1829 cuando Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), alumno de doctorado de Fourier, proporcionó una elegante demostración de que las series de Fourier son convergentes para una amplia clase de funciones, depositando de forma definitiva el peso de la razón en el lado de la balanza del debate defendido por este. Tras esta contribución, surgieron nuevas preguntas cuya solución llevaría al establecimiento de un fundamento más sólido del mismísimo análisis matemático —al conducir, por ejemplo, hacia el estudio de las distintas formas de convergencia para sucesiones y series de funciones—, así como a la creación de nuevos temas de investigación, como la teoría de la medida, el análisis funcional, la teoría de conjuntos, el análisis armónico abstracto, el análisis en tiempo-frecuencia en sus diversas variantes o la teoría de ondículas, entre otros. El impacto del análisis de Fourier en matemáticas ha sido, por tanto, también inmenso.

En los primeros tres capítulos del libro se explican la vida y la obra de Fourier. Concretamente, en los capítulos 1 y 2 se expone cómo y por qué Fourier, de origen verdaderamente humilde, fue impulsado —por no decir arrastrado— por la Revolución francesa hacia posiciones que, de no haberse producido los cambios históricos que sucedieron, le habrían estado vetadas. Así, pudo avanzar en la vida hasta el punto de ser primero alumno de la Escuela Normal Superior y luego profesor en la Escuela Politécnica. Le habría gustado permanecer en París, dedicado a una vida académica como matemático, colaborando con aquellos a quienes admiraba,

como era el caso de Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813). Sin embargo, no pudo elegir. Su participación en la vida política de Francia le vino impuesta al ser designado por Napoleón miembro de la comisión científica para la campaña de Egipto. Ya en territorio ocupado, fue nombrado secretario perpetuo del Instituto de El Cairo. A su vuelta a Francia, Napoleón le asignó la prefectura de Isère y, de este modo, se vio forzado a vivir en Grenoble, donde el frío invierno le angustiaba. Su obsesión por mantener calientes las habitaciones que ocupaba en la prefectura le llevó sin duda a elegir el tema de investigación al que dedicaría su vida: la conducción del calor. En el capítulo 3 se explica el contenido de la *Teoría analítica del calor* y se relatan la caída en desgracia política de Fourier, así como sus últimos años, en París, por fin dedicado a una vida académica.

El capítulo final del libro, dedicado al legado de Fourier, se centra en una explicación general de por qué este ha encontrado tantas aplicaciones, lo cual se debe en gran medida al teorema del muestreo de Shannon, Whittaker y Kotelnikov —que permite digitalizar el mundo— y los algoritmos rápidos para el cálculo de la transformada discreta de Fourier. Al final se incluye, con cierto detalle, una aplicación especialmente importante en medicina: la transformada de Radon y su uso para la tomografía axial computarizada (TAC).

Hay quien afirma que existen dos tipos de genios: los zorros y los erizos. El zorro sabe muchas cosas, sabe cómo combinarlas, y suele ser muy productivo y diverso. El erizo, sin embargo, sabe una sola cosa, pero esta es tremendamente importante. Euler fue un zorro; Fourier es, sin duda, un ejemplo de erizo.

Este libro se ocupa de tres temas centrales. El primero es, obviamente, introducir algunas ideas matemáticas que han logrado un importante calado y son descriptivas del pensamiento matemático moderno, y situarlas en el contexto histórico que les corresponde. El segundo aspecto destacable es, probablemente, el debate sobre las ideas matemáticas aportadas por Fourier, que es un claro ejemplo del modo en el que la ciencia avanza y, además, arroja luz sobre la naturaleza humana de los científicos, quienes con frecuencia deben buscar soluciones de equilibrio entre las presiones mundanas a las que están sometidos y su amor a la verdad. Finalmente, nos parece que otro tema de reflexión importante es la perspectiva defendida por Fourier de que las matemáticas deben ser útiles y, en particular, que la investigación en matemáticas debe plantearse en gran medida al servicio de la física. Es obvio que este objetivo de utilidad pública fue alcanzado por Fourier mucho más allá de la más optimista perspectiva que él pudiera imaginar en vida.

1768 Jean-Baptiste Joseph Fourier nace en la ciudad francesa de Auxerre, el 21 de marzo.

1789 Se convocan los Estados Generales y la Asamblea Constituyente. Primera memoria de Fourier sobre la teoría de ecuaciones.

1793 Fourier ingresa en la Sociedad Popular de Auxerre. Maximilien Robespierre se convierte en miembro del Comité de Salud Pública.

1794 Fourier es arrestado y está a punto de ser guillotinado. Ejecución de Robespierre. Liberación de Fourier. Creación de las escuelas Politécnica y Normal.

1795 Fourier ingresa en la Escuela Normal Superior de París, que se cierra ese mismo año. Supresión del Tribunal Revolucionario. Fourier vuelve a ser arrestado y liberado. Se convierte en profesor de la Escuela Politécnica.

1798 Fourier es reclutado para la Campaña de Egipto.

1799 Napoleón Bonaparte vuelve a París, abandonando a su ejército en El Cairo. Fourier participa en la exploración del Alto Egipto. Golpe de Estado de Napoleón.

1801 Firma del Concordato. Capitulación de Menou. Fourier regresa a Francia.

1802 Fourier, prefecto del Departamento de Isère.

1804 Napoleón se autoproclama emperador de Francia. Fourier asiste a la ceremonia.

1807 Fourier presenta su *Teoría de la propagación del calor en los sólidos* ante la Academia de Ciencias. Es la fecha de nacimiento del análisis de Fourier. Comienza el debate sobre la veracidad y el alcance de los resultados expuestos en la memoria.

1810 Primeros volúmenes de la *Descripción de Egipto*. Fourier se encarga de la edición de la obra y redacta el capítulo inicial.

1811 Obtiene el Gran Premio de la Academia de Ciencias por su *Teoría del movimiento del calor en los sólidos*, la versión revisada y ampliada de su memoria de 1807.

1814 Napoleón abdica. Fourier se mantiene como prefecto de Isère ante la Corona.

1815 Fin del exilio de Napoleón. Fourier cesa como prefecto de Isère y es nombrado prefecto del Ródano, posición a la que renuncia posteriormente. Batalla de Waterloo. Segunda abdicación de Napoleón.

1817 Fourier se convierte en miembro de la Academia de Ciencias gracias al apoyo del vizconde de Dubouchage y obtiene un sueldo vitalicio que le permite dedicarse casi exclusivamente a la investigación.

1822 Publicación de la *Teoría analítica del calor*. Muere Delambre. Fourier es elegido secretario perpetuo de la Academia de Ciencias.

1830 Fourier muere en París tras padecer enfermedades de forma intermitente durante los últimos cinco años de su vida.

CAPÍTULO 1

El despertar de un nuevo mundo

Nacido en 1768, a las puertas de la Revolución francesa, Fourier se benefició, y también se vio amenazado, por el surgimiento de un nuevo mundo. Este contexto histórico propició que, a pesar de nacer en un entorno más que humilde, con el tiempo llegara a ocupar una posición de privilegio en su país. También en las matemáticas y en la física de finales del siglo XVIII y principios del XIX se vivió una revolución, en la que Fourier participó como uno de los actores principales.

Situémonos en Francia, a finales del siglo XVIII. Es una época convulsa, difícil. Hubo cambios en lo social, en la cultura, en la tecnología. El mundo de antes de la Revolución francesa en nada se parecía al que se impuso a partir de la toma de la Bastilla, en París, el 14 de julio de 1789. Tras la Revolución vendría el imperio, luego la monarquía, de nuevo —por pocos días— el imperio y, finalmente, la restauración monárquica. De hecho, Francia se mantendría oscilando entre república, imperio y monarquía durante los setenta y cinco años posteriores a la caída de la Primera República, tras el golpe de Estado de Napoleón Bonaparte (1769-1821). Estos cambios implicaron, para muchos, enormes dificultades, y para otros supusieron la llegada de nuevas oportunidades, antes absolutamente inconcebibles. Es muy probable que lo que hoy se denomina terrorismo tuviera sus primeras formas de expresión en la época del Terror, en plena Revolución, cuando Robespierre (1758-1794) imponía su ley a fuerza de guillotina. También supuso el fin de muchos de los privilegios de la aristocracia y el fortalecimiento de la burguesía. Por todo ello, en un sentido muy literal, esta época representa el acta de nacimiento del mundo moderno. Las nuevas ideas introducidas entonces llegaron para quedarse y los colores de la bandera francesa todavía representan los valores de la revolución: libertad, igualdad y fraternidad; azul, blanco y rojo.

UN HUÉRFANO PRODIGIO

Jean-Baptiste Joseph Fourier nació en Auxerre, al sureste de París, el 21 de marzo de 1768. Fue el noveno hijo del segundo matrimonio de su padre, que era sastre, y en total tuvo once hermanos de padre y madre, y tres de padre. Quedó huérfano siendo un niño, con lo que las cartas que el destino parecía haberle otorgado eran malas. Pero la educación fue su tabla de salvación: comenzó sus estudios en una pequeña escuela preparatoria y en 1780 ingresó como alumno en la Escuela Real Militar de Auxerre tras recibir el apoyo de varias personalidades locales que, impresionadas por sus cualidades para el estudio, entre las que destacaba su rapidez mental, le recomendaron ante el obispo local.

En Francia solo había once de estos colegios. Se habían creado todos ellos en 1776 mediante el sencillo procedimiento de cambiar el nombre a varias escuelas provinciales previamente existentes. La nueva denominación de Escuela Real Militar implicaba que estas instituciones asumían el deber de acoger entre sus alumnos a unos pocos estudiantes que, aun siendo pobres, tenían origen noble, y cuyo destino final sería formar parte del ejército, bien en el cuerpo de artillería o bien en el de ingenieros. Esto explica por qué en estas escuelas se prestaba especial atención a las matemáticas.

Cada centro estaba dirigido por una orden religiosa, y todos ellos competían en prestigio. El de Auxerre estaba a cargo de la congregación benedictina de San Mauro. Además, todas las escuelas mantenían unos mínimos de calidad elevados y se sometían al control de un grupo de inspectores que eran nombrados por el ministro de la Guerra y que se encargaban de visitarlas periódicamente. Uno de estos inspectores era Adrien-Marie Legendre (1752-1833), responsable de importantes contribuciones al análisis matemático, la teoría de números y el álgebra abstracta, entre otros campos, quien era ya entonces un matemático de renombre. Para la física, se recurría al texto de Bossut (1730-1814) y, en el caso de las matemáticas, se usaban los libros de Bezout (1730-1783).

ADRIEN-MARIE LEGENDRE

Aunque algunas biografías señalan su nacimiento en París, existen razones para pensar que Adrien-Marie Legendre (1752-1833) nació en Toulouse y que su familia se trasladó a París cuando aún era un niño. Estudió en el colegio Mazarin, donde recibió una excelente formación en física y matemáticas. Defendió su tesis en 1770, con tan solo dieciocho años y, gracias al apoyo del matemático y filósofo francés Jean le Rond D'Alembert, consiguió un empleo como profesor en la Escuela Militar, donde también enseñaba Laplace. Quizás el verdadero punto de partida para su carrera académica fue ganar un importante premio que la Academia de Ciencias de Berlín había convocado en 1782, con un trabajo sobre la trayectoria de proyectiles en medios resistentes. Este fue el primero de muchos reconocimientos. Fue miembro del Comité de Pesas y Medidas, de la Real Academia de Ciencias de Londres y de la Academia de Ciencias de París. En 1803 Napoleón reorganizó el Instituto Nacional, y Legendre entró como miembro de la sección de Geometría. De 1799 a 1815 trabajó como examinador de matemáticas para estudiantes aspirantes a la graduación en artillería en la Escuela Real Militar. Fue en este período cuando manifestó, sin éxito, su apoyo a Fourier.

Aportaciones matemáticas

En 1824, se le retiró su pensión de la Escuela Real Militar porque se negó a votar por el candidato del gobierno en el Instituto Nacional, el conde de Corbière, entonces ministro del Interior. Con el cambio de gobierno, en 1828, se restableció parcialmente su pensión, y tres años más tarde fue nombrado oficial de la Legión de Honor. Sus trabajos en teoría de números entraron en competencia con los de Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Ambos se disputaron la prioridad para la ley de reciprocidad cuadrática, pero Legendre acabó admitiendo que Gauss había llegado al resultado antes que él. Conjeturó el teorema del número primo, así como la infinitud del conjunto de números primos que pertenecen a una progresión aritmética cuyo primer término es coprimo con la diferencia. Demostró que π^2 es irracional, obtuvo una prueba sencilla de la irracionalidad de π y conjeturó que π es trascendente. También realizó importantes contribuciones a la geometría y la astronomía. Su trabajo sobre integrales elípticas inspiraría la obra más importante del matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829).

Fourier se distinguió como un estudiante brillante. Al principio destacó en literatura. Mostraba, además, gran facilidad para expresarse, algo que le resultaría muy útil en su carrera política. Se dice que escribía él mismo los sermones del obispo, pero pronto, a partir de la pubertad, desarrolló un profundo interés, que llegaría a la obsesión, por las matemáticas, a cuyo estudio dedicaba las noches. Entre diciembre de 1784 y noviembre de 1785 enfermó debido a los excesos de su dedicación al estudio, que le llevaron a un tremendo agotamiento y le pasaron factura. A partir de entonces, sufrió de insomnio, dispepsia y asma, enfermedades que le marcarían.

Pronto quedaría claro que, para él, había solo dos caminos razonables: o bien hacía la carrera militar, o bien entraba en la Iglesia, donde podría dedicarse con provecho a la enseñanza. Como aquella era la mejor opción, solicitó al ministro de la Guerra una plaza para el cuerpo de artillería o el de ingenieros. En su solicitud contó, además, con el apoyo explícito de Legendre. Sin embargo, la respuesta le cayó como un jarro de agua helada, recordándole su origen humilde: «Aunque fuera un segundo Newton, no teniendo origen noble, no podrá entrar en la artillería». Fourier comenzó, sin embargo, a recibir clases de matemáticas en la Escuela Real Militar de Auxerre y, en 1787, ingresó en la abadía de St. Benoît-Sur-Loire, donde se prepararía para sus votos y, mientras tanto, enseñaría matemáticas a los otros novicios.

Lo poco que se conoce de la vida de Fourier en este período de tiempo se debe a la existencia de varias cartas que envió a su antiguo profesor de matemáticas en Auxerre, C. L. Bonard (ca. 1765-1819), con quien mantuvo una estrecha y duradera amistad. En ellas se descubre que su primer amor matemático fueron las ecuaciones algebraicas, ya que pregunta a Bonard si había obtenido algún tipo de respuesta de otro profesor, a quien había remitido un trabajo sobre localización de ceros de este tipo de ecuaciones. Fundamentalmente, sus misivas muestran interés por cuestiones de física, matemáticas y astronomía, y por las actividades de algunos matemáticos como Nicolas de Condorcet (1743-1794) o Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). En una de ellas justifica su renuncia a

su suscripción al *Journal de Genève* con la siguiente afirmación: «El mundo y yo vamos a crecer aún algunos años antes de conocernos mutuamente»; y en otra, enviada en marzo de 1789, cuando la Revolución era ya casi una realidad y todo el mundo andaba preocupado por los disturbios, Fourier parecía no preocuparse por estas cuestiones. Sin embargo, se quejaba amargamente de su encierro en la abadía de St. Benoît:

> No poder leer más libros que los propios ¿no es estar condenado a la ignorancia? Es una privación el no poder ser consolado por toda la filosofía. Aquí no tengo libros para leer, excepto una copia miserable de Montaigne, a la que le faltan varias páginas cuyo contenido me veo obligado a adivinar. Me ocupo un poco con el griego, pero puedes creerme que es más para leer a Euclides y Diofanto que a Píndaro y Demóstenes [...]. Solo y sin ayuda uno puede meditar, pero no realizar descubrimientos. Dejando volar la imaginación, mi mundo se hace mejor, pero no más sabio. El corazón gana, pero la cabeza pierde.

Su desbordante autoestima, al compararse con los más grandes científicos de la historia, se une a una visión pesimista sobre su éxito científico inmediato, al afirmar: «Ayer cumplí veintiún años. A esa edad Newton y Pascal ya se habían ganado la inmortalidad».

UNOS INICIOS TURBULENTOS

Entonces llegó la Revolución, y esta afectó a todos, estuviesen o no interesados en ella, quisieran o no implicarse. El 28 de octubre de 1789 la Asamblea Constituyente aprobó un decreto en el que se prohibía la imposición de votos a los nuevos novicios de las distintas órdenes religiosas y, en otro decreto, aprobado el 2 de noviembre, se traspasaban al Estado las propiedades de la Iglesia. Si hubiera tomado sus votos en ese momento, tal y como le pedían desde su congregación, se habría garantizado una pensión vitali-

cia. Pero Fourier decidió abandonar la abadía y volver a Auxerre, donde trabajaría como ayudante de Bonard, enseñando matemáticas en la Escuela Real Militar. Aunque intentó concentrarse en la enseñanza y retrasar su implicación en las revueltas el máximo tiempo posible, acabó participando en la vida política, al servicio de la Revolución, a partir de 1793.

El 21 de febrero de 1793 se aprobó un decreto para ampliar en 300 000 hombres el ejército revolucionario, decreto que determinaba las cuotas de voluntarios que correspondían a los distintos departamentos y que dejaba en manos de las autoridades locales el proceso de reclutamiento. Fourier intervino en la asamblea de Auxerre con tal elocuencia que su propuesta fue aprobada. Entonces se le invitó a formar parte de la Sociedad Popular de Auxerre. Además, a los pocos días se decretó el establecimiento, en toda Francia, de los llamados comités de vigilancia seccionales, que debían encargarse del control de los «extranjeros y viajantes», a quienes se investigaba por su posible implicación en actividades contrarrevolucionarias. Fourier fue impulsado a formar parte del comité de vigilancia en Auxerre y, por supuesto, aceptó, pues no hacerlo implicaba un más que palpable riesgo de ser señalado como sospechoso de recelar de la Revolución y, en particular, de oponerse al Partido Patriótico.

«Fourier es un producto puro de la Revolución francesa.
Su vida es una muy interesante sección transversal de la historia de Francia en los años 1770-1830.»

— JEAN-PIERRE KAHANE.

Ese año la Revolución pasó por varias crisis internas. En pocos meses los comités de vigilancia fueron degenerando rápidamente tras la publicación en París de diversos decretos, hasta que se les dotó de un poder casi ilimitado que los transformaba en un instrumento fundamental para el establecimiento del Terror. Entonces Fourier, alarmado, intentó dimitir. Presentó por escrito su renuncia, alegando que se sentía «menos capacitado que otros muchos para ejecutar la ley». Pero su dimisión no fue

aceptada y no se hizo efectiva. Por el contrario, le advirtieron de que «la ley prohíbe a todo oficial el abandono de su puesto» y fue acusado de abandonar a sus compañeros precisamente cuando podría serles más útil, reprochándole «la debilidad de su conducta» y poniendo en tela de juicio «la pureza de sus intenciones». Pronto llegarían nuevos y más peligrosos conflictos. Por ejemplo, mientras acometía una misión cumpliendo órdenes del congresista Pierre-Louis Ichon, intervino en un conflicto local, en Orleans, defendiendo a tres *sans-culottes* que habían sido arrestados por orden de Laplanche, que entonces ostentaba allí la máxima autoridad.

Aunque actuó con la sana intención de defender a tres padres de familia, provocó la ira de Laplanche y fue acusado ante Ichon y ante el Comité de Salud Pública de un delito de desorden público. Poco tiempo después de este incidente, la Convención aprobó un decreto por el que se recordaba a los representantes del pueblo que, como Ichon, habían sido enviados a los diferentes distritos para realizar aquella misión, así como a sus delegados (como Fourier), que no estaban autorizados a intervenir en las decisiones de los que (como Laplanche) ocupaban de forma permanente el puesto de representante del pueblo en los distintos departamentos. Cuando Ichon tuvo noticia de este nuevo decreto, perdió la cabeza y, ante el temor de ser acusado de complicidad con Fourier, dictó una orden para que este fuera detenido y ejecutado.

Fourier volvió entonces a Auxerre, donde escapó de su detención y asesinato gracias a la ayuda de la Sociedad Popular, que se interpuso entre él e Ichon. Además, en aquel momento también pudo contar con el apoyo del diputado de la Convención por el Departamento de Yonne, que se encontraba en Auxerre e intervino en su favor. En una orden redactada posteriormente, Ichon, aunque estaba más sosegado, no le perdonaba que se hubiera extralimitado en sus funciones, por lo que le declaraba «inhabilitado para este tipo de tareas en el futuro» y «definitivamente dimitido».

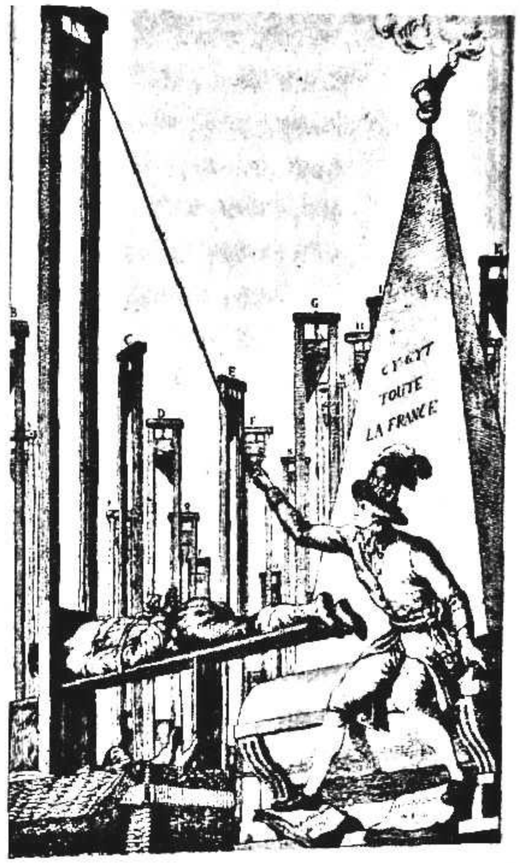
De nuevo en Auxerre, Fourier solicitó un puesto en la biblioteca municipal argumentando que, por motivos de salud, necesitaba reposo; pero su petición fue denegada. Sin embargo, la Sociedad

Popular le nombró comisionado para clasificar y preservar aquellos libros que se considerase que estaban en peligro de destrucción a causa de la apropiación, por parte del Estado, de numerosas bibliotecas particulares y de las bibliotecas que antes pertenecían a la Iglesia. Fourier consiguió, asimismo, un puesto como docente en la Escuela Militar de Auxerre, y lo mantuvo cuando esta pasó a ser una escuela nacional.

Además, mantuvo su militancia en el Comité Revolucionario de Auxerre, del que llegó a ocupar el puesto de presidente. Sin embargo, se sabe, por diversas fuentes, que aunque ocupó la posición que correspondía al máximo agente del Terror en Auxerre, Fourier nunca participó en actividades violentas. Por el contrario, las aborrecía. Siempre que pudo, intervino en favor de los más desprotegidos, llegando a realizar diversas artimañas que impidieron la ejecución de alguna orden que él consideraba injusta. Sin duda, estas actividades están relacionadas con su detención, por orden del Comité de Seguridad General, el 4 de julio de 1794.

Solo unos días antes, Fourier se había presentado ante Robespierre para protestar por las consecuencias que había tenido para él el incidente de Orleans. Consideraba injusto que se le apartara, aunque solo fuera parcialmente, del servicio a la causa revolucionaria. Pero este encuentro no tuvo frutos, pues Robespierre no impidió su detención. Sin embargo, los ciudadanos de Auxerre se levantaron en apoyo de Fourier, y lograron que fuera excarcelado. Pero uno de los miembros del Comité de Salud Pública presentó nuevamente cargos, acusándole de «hebertista» —revolucionarios extremistas cuya denominación procede de su portavoz, el periodista Jacques-René Hébert— y, a los pocos días, fue nuevamente detenido.

Fourier entró en prisión, por tanto, por una causa de tipo político, equiparable a una acusación de terrorismo, en uno de los peores momentos posibles, pues en aquellas fechas la guillotina se alimentaba a diario de este tipo de presos. Fourier escribiría una carta en la que afirmaba que estaba condenado a muerte, pues esta era su convicción personal, ya que sabía de buena tinta que ese era el final habitual de los que se encontraban en una situación parecida a la suya.



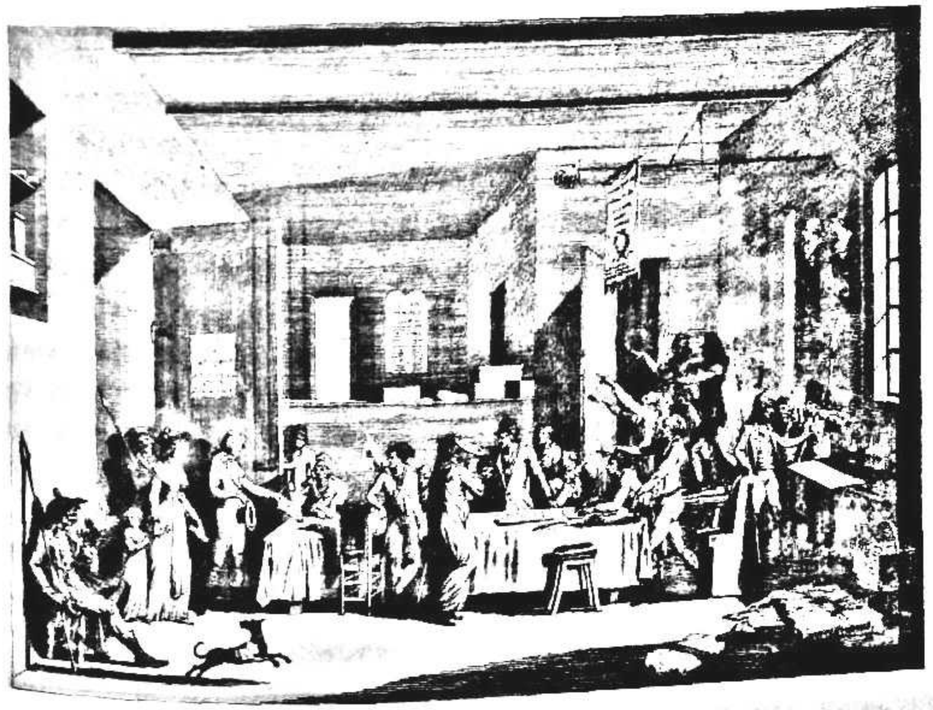


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Jean-Baptiste Joseph Fourier según un grabado francés del siglo XIX.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Dibujo satírico que muestra al dirigente revolucionario Maximilien Robespierre ejecutando al verdugo después de guillotinar a todos los franceses (1793).

FOTO INFERIOR:
Grabado que representa una reunión del Comité de Salud Pública en la época del Terror (1793-1794).

Pero faltaban solo unos días para el 9 de termidor del año II de la Revolución (27 de julio de 1794), momento de la caída de Robespierre, y fue esta circunstancia la que finalmente salvó a Fourier de la guillotina. Si la cabeza de Robespierre no hubiera caído ante el tribunal revolucionario, Fourier habría sido juzgado y condenado a la pena capital. Afortunadamente, fue liberado y, al poco tiempo, admitido como alumno en la clase de ciencias para la recién creada Escuela Normal Superior de París.

PARÍS, EL DESTINO IDEAL

París era el centro de toda la vida cultural y académica de Francia y, por tanto, un destino ideal para Fourier, que deseaba iniciar una verdadera carrera académica. Allí conoció a algunos matemáticos consagrados, como Joseph-Louis de Lagrange, a quien admiraba, pues había estudiado su *Mecánica analítica* y además conocía las ideas del cálculo de variaciones, disciplina creada por él y por Leonhard Euler (1707-1783), Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) o Gaspard Monge (1746-1818). París era la meca de las matemáticas en el siglo XVIII y Fourier deseaba aprovecharlo. No faltó a una sola clase.

Así, mientras sus compañeros se burlaban de Lagrange por su acento italiano y porque era incapaz mantener el orden en sus clases, para Fourier era el nombre más importante de la ciencia en aquel momento, no solo en Francia sino en toda Europa. Del mismo modo que admiraba a Lagrange, despreciaba a Laplace pues, aun admitiendo el valor de sus aportaciones matemáticas, lo reconocía como un personaje sumiso, excesivamente condescendiente con los poderosos. Admiraba al matemático pero despreciaba al político. René Just Hauy (1743-1822), Claude Louis Berthollet (1748-1822) y Monge también formaban parte de la plantilla de profesores con los que Fourier tuvo contacto en la Escuela Normal.

Al abandonar los obsoletos métodos de la geometría sintética, que suponían más bien un obstáculo constante para la generación de nuevas ideas o demostraciones, y abrazar en su lugar los métodos más generales del álgebra, así como el uso de coordenadas para la descripción del comportamiento de las funciones, las matemáticas del siglo XVII habían dado un paso de gigante que posibilitó, entre otras cosas, la creación del cálculo. Este nuevo instrumento serviría, desde su mismo nacimiento, como soporte para el estudio de una gran variedad de problemas en física, especialmente en lo que posteriormente se pasaría a denominar «mecánica», una de cuyas partes, la mecánica celeste, se consideró paradigma del éxito del análisis matemático como mecanismo de expresión de las leyes naturales. ¿Cómo no admirar el cálculo, si permitía predecir con exquisita precisión algo tan importante y a la vez delicado como las trayectorias de los cuerpos celestes?

Típicamente, las funciones que aparecen en física resultan de medir cierta magnitud. Si la magnitud es un número, como la temperatura, estaremos ante una función escalar. Si, por el contrario, la magnitud que estamos estudiando es un vector (por ejemplo, es una fuerza), entonces estaremos ante una función vectorial, que se puede describir utilizando varias funciones escalares —las coordenadas del vector— a las que llamamos componentes de la función. Por otra parte, la función en cuestión puede depender de coordenadas espaciales o temporales (o de ambas), por lo que típicamente será una función que depende de un cierto número finito de variables. Por ejemplo, la distribución de temperaturas en un cuerpo depende de tres variables espaciales que definen la posición exacta del punto donde se mide la temperatura, y de una cuarta variable que indica el instante de tiempo en el que se realiza nuestra medición. Además, como la temperatura es un número, la función asociada será de tipo escalar. Por otro lado, toda fuerza queda determinada por un vector que, en general, tiene tres componentes, lo cual nos llevará a la consideración de una función vectorial que, además, puede depender de varias variables, pues podemos estar considerando distintas fuerzas en distintos puntos del espacio y en distintos momentos. Se sigue que los objetos matemáticos básicos con los que pueden estudiarse las leyes de la física son funciones vectoriales definidas en un espacio de dimensión finita.

Si bien el siglo XVII había producido estos magníficos conceptos, durante el siglo XVIII los matemáticos se habían especializado en manejar, con extremo virtuosismo, los conceptos del cálculo para construir modelos matemáticos precisos de los numerosos problemas de la me-

DIFERENTES CONCEPTOS DE DERIVACIÓN

A diferencia de lo que sucede en el cálculo de una variable, en este contexto no existe una única forma de derivar, sino que hay varias, y cada una de ellas tiene una motivación física distinta. También hay varias formas de integrar asociadas, cada una de las cuales produce un resultado análogo al teorema fundamental del cálculo que conocemos para las funciones de una variable. El caso más sencillo de derivación consiste en el cálculo de las derivadas parciales de una función escalar. Por brevedad, supondremos que la función f depende de tres variables independientes x, y, z. Si se quiere hallar, por ejemplo, la derivada parcial respecto de la variable x, lo único que debe hacerse es tratar el resto de variables como si fueran parámetros, y derivar respecto de x la función resultante:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}.$$

Las otras derivadas parciales se calculan de forma análoga. Evidentemente, este proceso se puede iterar. Por ejemplo, podemos derivar la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ respecto a cada una de las variables x, y, z, obteniendo las nuevas funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

respectivamente. Un resultado especialmente importante, que se utiliza frecuentemente en física, es el llamado «lema de Schwarz», el cual garantiza que bajo ciertas condiciones de regularidad, las derivadas cruzadas de una función no dependen del orden en el que se realice la derivación, pues solo cambian cuando se modifica el número de veces que derivamos respecto de alguna de las variables. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial z}.$$

Las derivadas parciales se utilizan para definir ciertos operadores diferenciales que tienen interés físico. Los ejemplos más importantes son, para funciones escalares, el gradiente:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

y, para funciones vectoriales,

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

la divergencia:

$$\text{div}(f) = \partial F_1 / \partial x + \partial F_2 / \partial y + \partial F_3 / \partial z$$

y el rotacional:

$$\text{rot}(F) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Nosotros vamos a usar, además, el laplaciano

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

pues este operador aparece de una manera explícita en la ecuación del calor de Fourier:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

cánica, que se traducían, en la mayoría de los casos, en el establecimiento de algún sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y luego resolverlos. Tal fue el éxito de la técnica del cálculo para estos menesteres y tanto fue el valor que se dio a esta, que para muchos, incluyendo, en primera línea, a Laplace —y, como se verá posteriormente, también a Fourier— el objetivo mismo de sus investigaciones no eran ya las matemáticas sino la solución de problemas propios de la física. Las matemáticas eran, pues, una herramienta al servicio de la

física. Simultáneamente, se generó el sentimiento de que era el propio análisis matemático el que incluía, entre sus intereses, a la mecánica y otras disciplinas físicas, por lo que para muchos las mismas razones justificaban la validez de una posición muy diferente: que la física es meramente una parte de las matemáticas. En ambos casos se podría aplicar, de todas formas, la siguiente afirmación de Fourier: «El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de los descubrimientos matemáticos», pensamiento al que se mantuvo fiel durante toda su vida.

EL PROBLEMA DE LA CUERDA VIBRANTE

Un modelo matemático que tuvo una importancia considerable para las matemáticas de los siglos XVII, XVIII e incluso del XIX y el XX es el que se desarrolló en torno al llamado «problema de la cuerda vibrante». Este problema fue formulado por el matemático británico Brook Taylor (1685-1731) en 1713, en su obra *Methodus incrementorum directa et inversa*. Se trata de obtener una descripción matemática precisa del movimiento de una cuerda elástica, así como el tiempo de vibración de la misma cuando esta se deja libre, tras haberla tensado mediante la aplicación de una fuerza externa.

La importancia de este problema, respecto al trabajo que habría de realizar posteriormente Fourier en sus estudios sobre la conducción del calor, proviene del hecho destacable de que fue en este contexto precisamente donde aparecieron por primera vez, de forma natural, los desarrollos en series trigonométricas, y Fourier encontró, en el estudio de este problema concreto, una fuerte motivación para introducir muchas de sus ideas.

«Aunque no nos esté permitido penetrar en los misterios íntimos de la naturaleza y aprender las causas verdaderas de los fenómenos, puede suceder que ciertas hipótesis ficticias basten para explicar muchos fenómenos.»

— LEONHARD EULER.

Supongamos que tenemos una cuerda elástica, de longitud L, en posición de equilibrio, tensada y pinchada en el origen de coordenadas y en el punto de abscisa L. Supongamos que ahora tiramos de ella forzando que adquiera la forma de la función $y=f(x)$, a la que llamamos «pulso» por analogía con la terminología utilizada con los instrumentos de cuerda (las cuerdas de una guitarra se pulsan y luego se dejan oscilar libremente). Necesitamos, por tanto, que $f(0)=f(L)=0$ y que $f(x)$ sea una función continua. Si soltamos la cuerda y la dejamos oscilar libremente, ¿qué formas adoptará con el transcurso del tiempo?

Para definir un modelo matemático que describa este problema en términos analíticos se suelen fijar las siguientes hipótesis:

- La cuerda oscila verticalmente. Cada punto de la cuerda está sometido a una vibración que siempre es perpendicular al eje de abscisas.
- La cuerda es homogénea. Su densidad lineal de masa es una constante μ.
- No existe fricción.
- La perturbación inicial, que separa la cuerda de su posición de equilibrio, es pequeña.

Estas hipótesis transforman el problema físico original en otro idealizado, más sencillo de tratar matemáticamente. Su imposición permite identificar unas ecuaciones que con frecuencia ayudan a comprender lo que sucede también en los casos en los que alguna de las hipótesis del modelo es eliminada. De hecho, en este caso concreto se sabe identificar un modelo matemático que es válido incluso cuando la perturbación inicial respecto de la posición de equilibrio es arbitraria (pero estos cálculos dan lugar a una ecuación diferencial más complicada y son posteriores a la época que nos ocupa).

Usemos la expresión $u(x,t)$ para la posición del punto de la cuerda correspondiente al valor x en las abscisas y en el instante de tiempo $t \geq 0$. En particular, $u(x,0)=f(x)$. Pues bien, es posible probar que la ecuación diferencial que describe el movimiento de la cuerda, si se verifican las condiciones mencionadas anteriormente, está dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para cierta constante positiva a que depende de las características físicas de la cuerda.

El primer matemático que dedujo y resolvió correctamente esta ecuación fue Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), en 1747. De hecho, se considera que la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales nació ese mismo año, gracias a sus aportaciones a este problema.

Él demostró que, si se extiende de forma adecuada la función f a toda la recta real —de modo que la nueva función sea periódica e impar, lo cual se puede hacer siempre de forma única—, entonces la solución de la ecuación de ondas, sometida a la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+at) + f(x-at)\big).$$

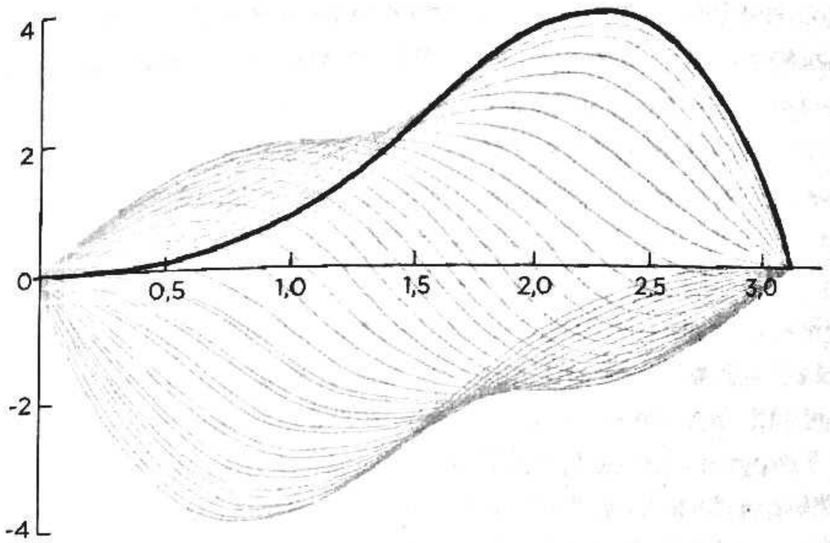
La solución proporcionada por D'Alembert tiene una interpretación física clara: la forma de la cuerda resulta de superponer dos ondas viajeras, cada una de las cuales se desplaza con la misma velocidad (constante), que depende del valor de a, pero en direcciones opuestas, y su forma viene determinada por el perfil inicial de la cuerda, que es el del grafo de la función $f(x)$. Como no hay rozamiento, no hay pérdida de energía y el movimiento se repite indefinidamente.

«Mientras el álgebra y la geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento, y sus aplicaciones, limitadas; pero cuando se han unido, han caminado juntas hacia la perfección.»

— JEAN LE ROND D'ALEMBERT, CARTA A LAGRANGE.

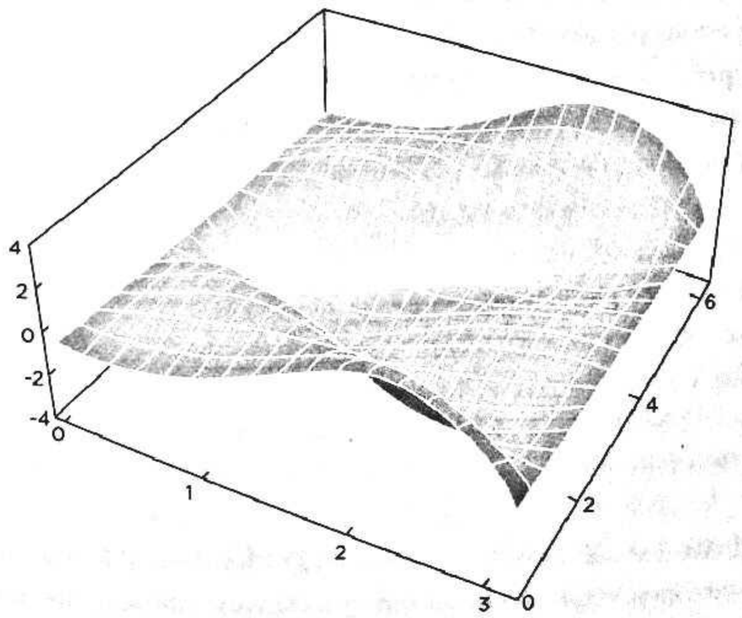
Una vez resuelta la ecuación, D'Alembert impuso que la función $f(x)$ se exprese en términos de una única fórmula, incluso para los valores de la incógnita que se salen del intervalo $[0,L]$, que es donde se ha planteado el problema físico. Esta hipótesis artificial tiene su razón de ser en que para D'Alembert, al igual que para otros muchos matemáticos de la época, las únicas funciones continuas eran las que hoy se conocen como funciones analíticas. En particular, estas satisfacen un estricto principio de identidad, según el cual, si son conocidas sobre los puntos de una sucesión convergente —es decir, con límite finito— con límite un punto interior a su dominio de definición, entonces podemos determinar, de forma unívoca, su valor en todos los puntos de su dominio. Además, estas funciones son, desde el punto de vista actual, extraordinariamente regulares: admiten derivadas de todos los órde-

FIG. 1



Perfil inicial (o pulso) de la cuerda vibrante (en negrita), para la función $f(x) = x^2 \sin(x)$, con $L = \pi$, y diferentes instantáneas del perfil que adquiere la cuerda para varios instantes de tiempo.

FIG. 2



Gráfica de la solución $u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+at) + f(x-at))$ del problema de la cuerda vibrante, para el mismo perfil inicial de la figura anterior. En ambos casos, se ha forzado que $a = 1$.

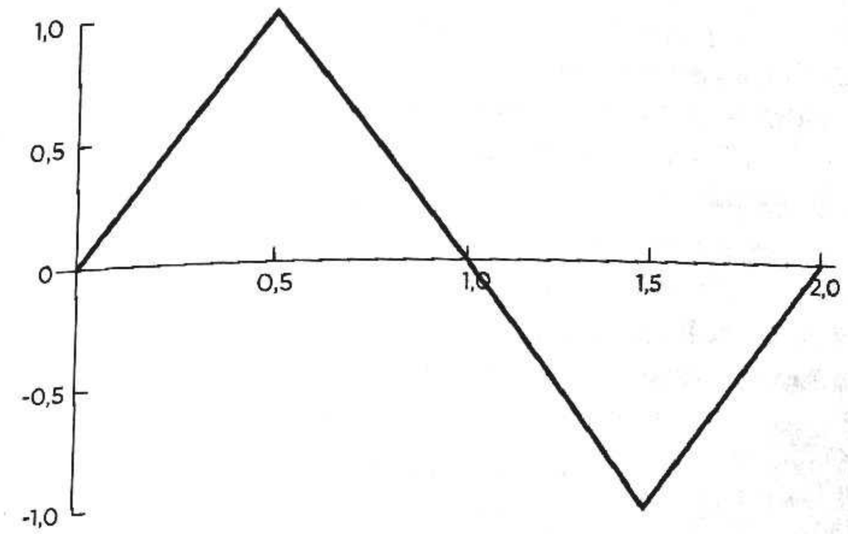
nes, y coinciden con su desarrollo de Taylor. Sin embargo, si se asume este grado de suavidad para la función $f(x)$, estaremos eliminando muchos casos físicamente posibles como, por ejemplo, el de una cuerda pulsada en forma triangular (figuras 3 y 4). D'Alembert argumentó, contra este y otros ejemplos similares, que no son físicamente posibles, pues las cuerdas siempre se doblan con una cierta curvatura. Claro que también existen funciones que son derivables de clase arbitrariamente grande pero no satisfacen ningún principio de identidad —basta con «pegar» de forma adecuada dos funciones analíticas—. Sin embargo, estos ejemplos no se habían estudiado en detalle en aquella época.

Entonces Euler (1707-1783) publicó una memoria sobre el problema de la cuerda vibrante en la que admitía como condición inicial una función $f(x)$ definida a trozos. Es decir, consideró la ecuación de ondas deducida por D'Alembert, pero admitía que la función $f(x)$ fuera representada mediante el uso de diferentes expresiones o fórmulas en las distintas partes del intervalo $[0,L]$. Él justificaba esta elección porque este tipo de funciones se obtienen fácilmente por medios físicos (mecánicos) y, por tanto, el problema de la cuerda vibrante tiene sentido para ellas. Además, observó que, a partir de la periodicidad de $f(x)$ se deduce que la solución general $u(x,t)$ es periódica en el tiempo, con un período que depende de la longitud y las características físicas de la cuerda.

En 1753 el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700-1782) se interesó por el mismo problema y publicó un trabajo en el que manifestó su desacuerdo explícito con la deriva de las ideas de Euler y D'Alembert, reprochándoles que se habían alejado del problema físico original:

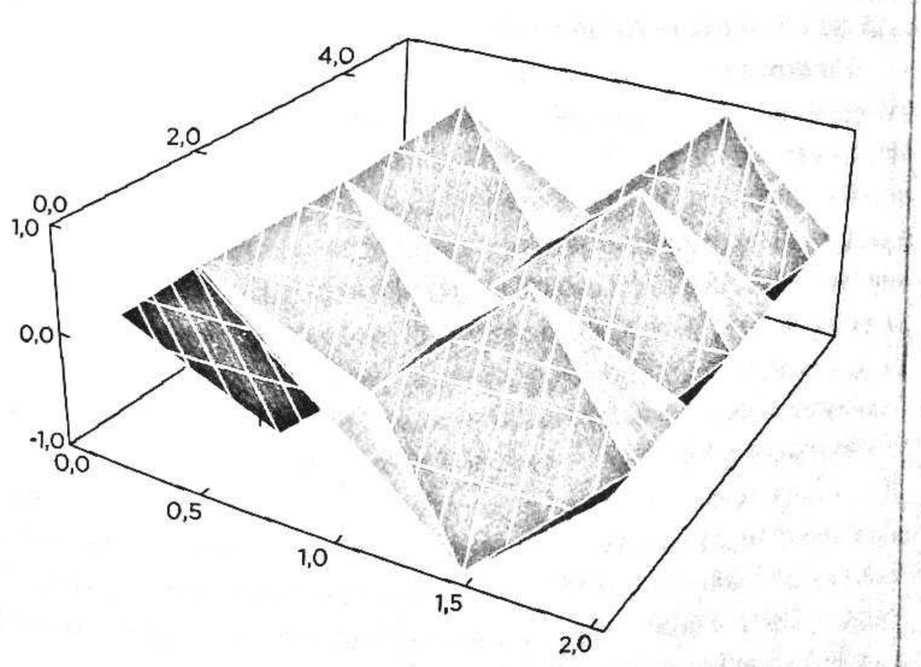
> Admiro los cálculos de los señores D'Alembert y Euler, que ciertamente incluyen lo más profundo y avanzado del análisis, pero muestran al mismo tiempo que un análisis abstracto, si se dirige sin un examen sintético de la cuestión propuesta, es más apropiado para sorprender que para iluminar. Me parece que basta prestar atención a la naturaleza de las vibraciones de las cuerdas para predecir, sin la realización de cálculo alguno, todo lo que estos grandes geómetras

FIG. 3



Ejemplo de pulso triangular de una cuerda elástica.

FIG. 4



Solución de la ecuación de ondas, sometida al pulso triangular de la figura 3.

han encontrado mediante los cálculos más difíciles y abstractos que la mente analítica haya concebido jamás.

Entonces, basándose en los principios de la acústica, argumentaba que los cuerpos sonoros vibran en una serie de modos simples con frecuencias de oscilación bien definidas y que, en el caso de las cuerdas vibrantes, los diferentes modos normales de vibración se obtienen a partir del modo fundamental, forzando que las distintas frecuencias que intervienen sean siempre múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. La afirmación de Bernoulli, en términos matemáticos, significa que:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi at}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}$$

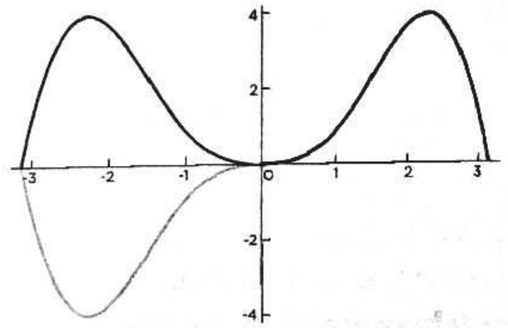
para ciertas constantes a_k. Es decir, Bernoulli obtenía, según argumentos puramente físicos, la misma solución a la que se habría de llegar posteriormente mediante la aplicación del método de separación de variables, pero sin hacer los cálculos que conducen a ellas.

En contra de estos argumentos, Euler exponía que, si se admiten como ciertos y se fuerza t=0 en la correspondiente fórmula, se obtiene que el perfil inicial de la cuerda debe ser una serie de senos, por lo que describe necesariamente una función periódica e impar, lo cual supone una restricción innecesaria. Por otra parte, reconocía que las expresiones obtenidas por Bernoulli resuelven la ecuación de ondas, pero, según él, solo representan una parte de las posibles soluciones y, además, estas mismas soluciones ya las había obtenido él mismo previamente. D'Alembert añadió con perspicacia que, hasta lo que él conocía, no está claro que toda función periódica e impar se pueda representar como una suma de este tipo. En particular, pensaba que la función debe ser al menos de clase dos. De hecho, en sus críticas se dirigía también contra Euler, a quien reprochaba su predisposición a aceptar como perfil de partida cualquier función continua.

Vale la pena observar que, si se asume que la función $f(x)$ es una serie de senos, entonces puede aplicarse, al menos formalmente, la fórmula trigonométrica

FUNCIONES PARES, IMPARES Y PERIÓDICAS

En matemáticas, hay muchas formas de expresar simetrías. Una de las más habituales que aparecen en el cálculo es imponer que el gráfico de una función sea simétrico respecto del origen de coordenadas, en cuyo caso decimos que se trata de una función impar. Esta condición se expresa en fórmulas por la expresión $f(-x)=-f(x)$, donde la igualdad se satisface para todo valor x del intervalo en el que la función está definida, que debe ser un intervalo cuyo punto medio es el cero. De forma análoga, tiene sentido estudiar aquellas funciones que satisfacen la igualdad $f(-x)=f(x)$, que son las llamadas «funciones pares». En términos geométricos, la paridad significa que el gráfico de la función es simétrico respecto del eje de ordenadas. Toda función definida en un intervalo del tipo $[0,L]$ y que se anula en los extremos de dicho intervalo, se puede extender de forma única como función par y como función impar al intervalo $[-L,L]$.



Función $f(x)=x^2\sin(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$ y sus extensiones par (gris oscuro) e impar (gris claro) al intervalo $[-\pi,\pi]$.

Aunque se podría pensar que hay muy pocas funciones pares (o impares), lo cierto es que no. De hecho, toda función definida en un intervalo simétrico respecto del origen se puede descomponer como suma de una función par más una impar, lo cual se observa directamente en la ecuación

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)).$$

Por otra parte, una función se dice periódica de período T si está definida en toda la recta y satisface la igualdad $f(x)=f(x+T)$ para todo número x. Es fácil comprobar que si tenemos una función definida en un intervalo $[a,b]$ y esta toma el mismo valor en los extremos del intervalo, entonces puede extenderse de un único modo a toda la recta como una función periódica de período $T=b-a$. Además, si el intervalo es simétrico respecto del origen y la función es par (o impar) entonces su extensión periódica preserva la paridad. La función que aparece en la fórmula de D'Alembert para la solución del problema de la cuerda vibrante se obtiene a partir de la función que da el perfil inicial de la curva, extendiéndola primero como función impar al intervalo $[-L,L]$ y luego como función periódica de período $T=2L$, a toda la recta. A partir de aquí, un cálculo sencillo permite comprobar que todos los puntos de la cuerda siguen un movimiento periódico con idéntico período $T=2L/a$, que depende exclusivamente de la longitud y las propiedades físicas de la cuerda.

DESARROLLOS DE TAYLOR

El desarrollo de Taylor de una función f en torno al punto a de la recta es la expresión:

$$T_a(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Para que esta fórmula tenga sentido es necesario que la función f admita derivadas de todos los órdenes en el punto a. Esto, por sí solo, no garantiza que la serie converja ni, en el caso de que lo haga, que la suma recupere la función f. Por ejemplo, si tomamos $f(x) = e^{-x^{-2}}$, entonces es fácil comprobar que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geq 0$, por lo que el desarrollo de Taylor de esta función en el punto a=0 es la función idénticamente nula, que coincide con la función de la que partíamos solo en el punto en el que se ha calculado el desarrollo de Taylor. Esto nos indica que la coincidencia de una función con su desarrollo de Taylor en todos los puntos de un intervalo de la recta —propiedad que llamamos «analiticidad de la función»— es en realidad una propiedad muy exigente. Los desarrollos de Taylor se estudiaron mucho antes que los de Fourier, probablemente porque los polinomios se consideran funciones mucho más sencillas que los senos y los cosenos.

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

para deducir que la expresión de $u(x,t)$ hallada por D'Alembert coincide con la solución calculada por Bernoulli. Así pues, uno de los puntos clave en esta discusión está precisamente en aclarar qué funciones admiten un desarrollo trigonométrico en senos del tipo anterior, lo cual, como se verá, es un aspecto central del análisis de Fourier.

Poco tiempo después, en 1755 para ser más precisos, Jean le Rond D'Alembert hizo llegar un manuscrito a la Academia de Ciencias de Berlín donde exponía que, si en algún punto x_0 de su dominio la función $f(x)$ no admite derivada segunda, entonces la función

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+at) + f(x-at))$$

propuesta tanto por él como por Euler como solución general de la ecuación de ondas unidimensional, no puede ser interpretada como tal, puesto que existen ciertos puntos de su dominio de definición en los que sencillamente no cabe calcular los términos de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ y } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

D'Alembert tenía razón. De hecho, para justificar el uso de funciones tan generales como las pretendidas por Euler, fue necesario esperar hasta mediados del siglo XX, cuando se introdujo el concepto de solución generalizada, en el contexto de la teoría de distribuciones de Schwartz (1915-2002).

El artículo remitido por D'Alembert se consideró muy polémico y, en consecuencia, fue rechazado. Se produjo entonces un intercambio de correspondencia bastante desagradable entre este y el secretario de la Academia de Ciencias de Berlín. D'Alembert envió en 1757 una nueva versión, dulcificada, pero esta tampoco vio la luz. Al parecer, tanto Euler en Berlín como el matemático y astrónomo francés Alexis Claude Clairaut (1713-1765) en París bloquearon la publicación de estos trabajos. Pero D'Alembert no se achicó, y publicó por su cuenta sus obras completas.

Bernoulli también respondió a las críticas de Euler y D'Alembert. Concretamente, argumentó que para un conjunto finito de nodos cualquiera $\{x_k\}_{k=1}^n$ tomados del intervalo $[0,L]$, y para funciones arbitrarias, es posible encontrar un polinomio trigonométrico

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin\frac{k\pi x}{L}$$

que interpola a la función $f(x)$ en dichos nodos. Entonces, al existir un conjunto infinito de coeficientes libres en el desarrollo trigonométrico propuesto por él, quizás una elección adecuada de los mismos permitiría establecer la identidad sobre un conjunto infinito de puntos, e incluso sobre todos los puntos de la recta.

VIBRACIONES DE UNA MEMBRANA

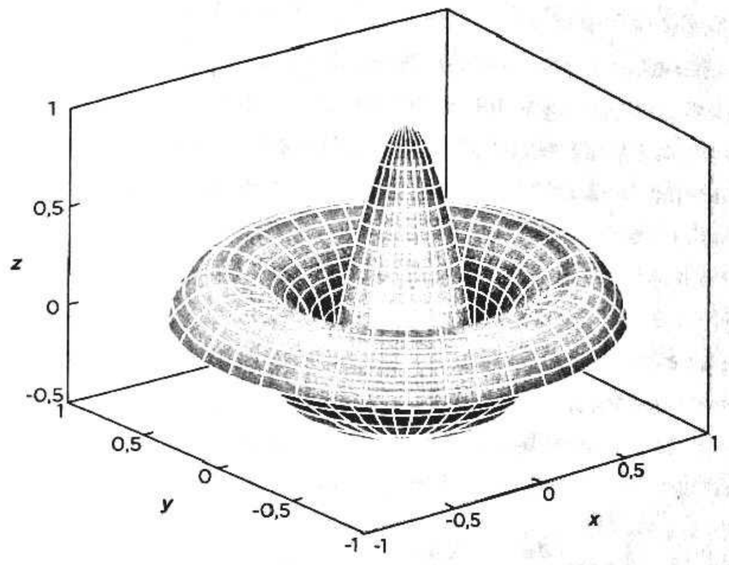
El problema de la cuerda vibrante es el primer ejemplo de una serie de problemas físicos de enorme interés relacionados con la transmisión de ondas y la elasticidad. Evidentemente, su estudio está ligado de forma indiscutible con la física de los instrumentos musicales de cuerda, como el violín, la guitarra o el piano. Quizás el siguiente caso de interés que podría considerarse es el estudio de las vibraciones de una membrana elástica. Pongamos por caso, para simplificar, que nos interesa conocer cómo vibra la piel de un tambor circular. La ecuación que describe dichas vibraciones es la versión bidimensional de la ecuación de ondas, que en coordenadas cartesianas viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

con condición de frontera $u_{|\partial\Omega} = 0$, donde Ω representa el disco de radio $R > 0$. Llamamos condiciones de frontera o condiciones de contorno de una ecuación en derivadas parciales definida en un dominio Ω a las condiciones que se imponen sobre sus soluciones cuando estas se consideran restringidas al borde (o frontera) de dominio. Por ejemplo, en el caso que estamos considerando se impone que la membrana, que podría representar la piel de un tambor, queda permanentemente sujeta a un bastidor.
En coordenadas cilíndricas, es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

con condición de frontera $u(R) = 0$. Las soluciones son también en este caso resultado de la superposición de ciertos modos normales de vibración (análogos a los armónicos puros del caso unidimensional). En la figura hemos representado uno de ellos, para el instante $t = 0$. Obviamente, subir de dimensión complica a la vez que enriquece el problema.



Vibración de una membrana circular.

Por su parte, Joseph-Louis de Lagrange se colocó del lado de Euler y afirmó que debían admitirse perfiles iniciales arbitrarios para la cuerda. Para apoyar su postura, resolvió, sin imponer restricciones sobre el perfil de partida, la versión discreta del problema, que había sido estudiada, aunque sin éxito, por Johann Bernoulli (1667-1748) en 1727, en lo que fue uno de los primeros intentos de solución del mismo. De hecho, Daniel Bernoulli conocería el problema de esta forma, de primera mano, a partir del trabajo de su padre. Según este esquema, la cuerda vibrante se modelaba como proceso límite a partir del movimiento de un número finito de cuentas de igual masa y colocadas equidistantes en una cuerda con una masa despreciable en comparación a la masa de las cuentas, muy tensa —lo cual permite asumir que la posición de equilibrio sea una recta horizontal— y que se desplaza ligeramente, en el instante inicial, de su posición de equilibrio. Joseph-Louis de Lagrange resolvió el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento del collar de cuentas, y solo se equivocó en el último paso de su deducción, que le llevó a introducir una serie divergente. De todas formas, una revisión cuidadosa de sus cálculos le hubiera llevado a la solución correcta,

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(s)\sin\frac{k\pi s}{L}ds\right)\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi at}{L},$$

incluyendo un cálculo explícito de los coeficientes de Fourier del desarrollo en senos de la función,

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(s)\sin\frac{k\pi s}{L}ds\,.$$

Sin embargo, fue Euler quien, en 1777, hallaría por primera vez estos coeficientes —en su caso, para el desarrollo en cosenos—. Pero sus argumentos eran excepcionalmente restringidos, pues solo podían aplicarse a funciones del tipo

$$f(x)=F(\cos\frac{\pi x}{L}),$$

donde $F(z)$ es una función analítica. Curiosamente, después de obtener su fórmula para los coeficientes, Euler comentó que esta puede deducirse de las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^L \cos\frac{i\pi s}{L}\cos\frac{k\pi s}{L}ds=\begin{cases}0 & si \quad i\neq k\\ L/2 & si \quad i=k\geq 1\\ L & si \quad i=k=0\end{cases},$$

que es precisamente la forma habitual de introducir estos desarrollos en los libros de texto actuales. Pero Euler veía esta técnica como un proceso heurístico, carente de valor de prueba.

ACUSACIONES DE TERRORISMO E INGRESO EN PRISIÓN

En aquellos días apacibles, Fourier recibió la noticia de que se publicaría uno de sus trabajos, que contenía una nueva demostración de la regla de los signos de Descartes. Sin embargo, su felicidad como alumno de la Escuela Normal duró poco. Muy pronto llegó a sus oídos el rumor de que en Auxerre se habían invocado acciones contra él bajo el pretexto de que había participado en el gobierno del Terror. Además, se le acusaba de malversación y se le tildaba de borracho, acusaciones que, dadas las circunstancias, debían ser tomadas con toda seriedad. Fourier escribió, desesperado, a su amigo Bonard, para que este le remitiese la información que pudiera conseguir sobre los detalles de esta nueva denuncia ya que necesitaba argumentar su defensa. Fourier confesó a Bonard: «Hice voluntariamente todo lo que consideré justo para la causa que había abrazado, pero no impedí todo lo que sobrepasaba este límite, sobre todo porque no habría podido hacerlo sin provocar mi propia ruina».

Su tolerancia, su renuncia a poner en riesgo la propia vida: eso era todo lo que podrían reprocharle; y ahora que había logrado relacionarse con algunos de los matemáticos más importantes del momento, se lamentaba de su suerte. Ahora que disfrutaba de las lecciones de Lagrange, Laplace o Monge; ahora que, por fin, regresaba al estudio y acababan de prometerle la publicación de uno de sus artículos, se enfrentaba a una nueva denuncia que lo ensombrecía todo.

En efecto, el 20 de marzo de 1795 la Convención Nacional recibió una misiva en la que se podía leer:

> Nos estremecemos cuando pensamos que los alumnos de la Escuela Normal se eligieron bajo el reinado de Robespierre y sus protegidos. Es muy cierto que Balme y Fourier, alumnos del Departamento de Yonne, han profesado ampliamente los principios atroces y las máximas infernales de los tiranos. Sin embargo, se preparan para ser los maestros de nuestros niños. ¿No es para vomitar su veneno en el seno de la inocencia?

Al poco, el 30 de marzo, en otra carta, se solicitaba el «desarme de los terroristas», lo cual fue decretado por la Convención el 10 de abril.

Al Comité de Instrucción Pública no paraban de llegar denuncias de actividades criminales contra los que durante la época del Terror habían ocupado posiciones de poder. Estas entraban a tal velocidad y frecuencia que el comité no podía asumirlas.

Quizá fue por eso, y porque algunas de ellas eran ambiguas, genéricas y tan mal documentadas por lo que resultaba imposible decidir nada en justicia, que el Comité resolvió devolver a Mailhe, por entonces el representante del pueblo en Yonne, las que se habían formulado en contra de Fourier. Se le pedía que adjuntase sus propios comentarios. Mailhe tardó algún tiempo en responder y, cuando lo hizo, se limitó a comentar que Fourier, en efecto, había ocupado puestos de responsabilidad durante el Terror, por lo que recomendaba que no se le permitiera acceder al cuerpo de maestros en el futuro. El Comité decidió entonces suspender su asignación económica como alumno de la Escuela Normal. Dos días después, Nicolas Maure y Monnot Villetard, como representantes de Yonne en la Convención, lograron la anulación de dicha orden. Fourier no volvió a recibir apoyo de Maure porque, a las pocas semanas, tras conocer la existencia de una orden de arresto, dictada por la Convención, en la que se le acusaba de conspirador, este se suicidó.

Fourier se hundía en el desasosiego. El 12 de mayo de 1795 había llegado a Auxerre una orden del Comité de Seguridad General exigiendo el desarme de una lista de supuestos terroristas, la cual incluía su nombre, pero él se enteró con retraso y solo a través de su familia. El 31 de ese mismo mes se justificaba, vía carta, ante las autoridades de Auxerre, argumentando que no había recibido notificación alguna y que, a pesar de que no se le había permitido defenderse de la acusación de terrorismo, aceptaba la resolución. Preguntaba, a continuación, de qué modo y en qué momento podía ejecutarse. Sin embargo, justo el día anterior, el 30 de mayo, Mailhe había ordenado la detención inmediata de los que aún no habían cumplido la orden de desarme. Fourier fue detenido la noche del 7 de junio. A los pocos días, escribió al presidente del Comité de Seguridad General para defenderse de las acusaciones de terrorismo, rogándole que le interrogara él mismo —u otra persona, pero contando con su presencia—. Entonces fue liberado, aunque por poco tiempo. De hecho, Fourier se defendió de las acusaciones de terrorismo desde prisión y por carta, y envió varias misivas a quienes le iban a juzgar. En particular, en una larga carta que envió a Villetard, esgrimía los siguientes argumentos:

> Con respecto a las acusaciones de terrorismo, no puedo avanzar aquí todas las razones que le convencerán de que estos cargos son infundados. Solo puedo insistir sobre los hechos incontestables de que nadie en la comunidad de Auxerre fue condenado a muerte o juzgado por el tribunal revolucionario en París, que ningún impuesto revolucionario fue establecido en ninguna de las formas, que las propiedades de aquellos que fueron detenidos nunca fueron confiscadas, que ningún agricultor, artesano o mercader fue arrestado, que en lo que a mí personalmente concierne, creo haber introducido en mi conducta y en mis opiniones una moderación que no encontré en mis adversarios, que lejos de haber compartido la maldad revolucionaria de numerosos hombres, la traté siempre con horror y la denuncié públicamente, que he experimentado el terror mucho más de lo que haya podido inspirarlo, ya que yo fui víctima de él precisamente hace un año, cuando fui arrestado e incluso condenado a muerte.

Y, con la intención de justificar su nombramiento como presidente del Comité Revolucionario en Auxerre, se defendía en los siguientes términos:

> Se me confió esta labor a través de sus propios votos y estaba sometido a una vigilancia determinada por la ley. Recibí este puesto sin solicitarlo, lo mantuve sin poder desembarazarme de él y lo ejercí sin pasión. [...] Respeté el poder que se me había concedido y repetí miles de veces que alguna vez tendríamos que rendir cuentas por lo que estábamos haciendo.

Además, respecto a sus decisiones al frente del comité, argumentaba lo siguiente: «Tenga por cierto que jamás hice nada de forma arbitraria, nada que no emanase directamente de una ley». Fourier siempre trató de dulcificar la aplicación de las leyes. Por ejemplo, rechazó sistemáticamente la confiscación de bienes a los detenidos. Pensaba que debía permitirse todo aquello que no estuviera explícitamente prohibido por ley y, en varias ocasiones, defendió a los que habían sido injustamente acusados. Aun así, sabía que tenía numerosos enemigos que actuarían implacablemente contra él. De ellos hablaba cuando, en correspondencia con Bonard, afirmaba:

> Quedan, sin embargo, aquellos que, por ser nobles o curas o familiares de emigrantes, se hallaban incluidos entre los afectados por la ley del 17 de septiembre y, en consecuencia, experimentaron una detención temporal al haber sido declarados enemigos de la Revolución. Me acusan de no haberme opuesto a su arresto y nunca me perdonarán que haya firmado sus órdenes de detención. Pretenden creer que yo podría haberlos liberado haciendo uso de la confianza que se había depositado en mí.

Se desconocen las razones por las que fue liberado. Probablemente Lagrange o Monge intercedieron en su favor, quizá porque le valoraban como matemático y como docente. También es posible que su liberación final fuera sencillamente la consecuencia natural de un cambio en el ambiente político en la Convención que suavizó sus ataques a los jacobinos. Lo cierto es que hubo voces que salieron en su defensa, que esas voces se escucharon y que fue excarcelado, con lo que por segunda vez escapó a una casi segura condena a muerte.

Fourier regresó a la Escuela Central de Trabajos Públicos, cuyo director era Monge, donde había sido nombrado profesor ayudante antes de su arresto en París. Poco tiempo después participó en la inauguración de la nueva Escuela Politécnica, donde permaneció durante unos años dedicado casi en exclusiva a la docencia. Allí colaboró con Monge en sus clases de Geometría Descriptiva, que incluían aplicaciones a temas militares, y posteriormente enseñó análisis bajo la estela de Lagrange. También ayudó en la elaboración de los programas y en los procesos de selección de nuevos alumnos para la escuela. En particular, fue durante uno de estos procesos cuando Fourier conoció al físico y matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840), quien primero fue su alumno en la Escuela Politécnica, luego —durante la campaña de Egipto de Napoleón— le sustituyó como profesor y, con el tiempo, llegó a ser uno de sus principales críticos y oponentes en varios aspectos relacionados con sus investigaciones sobre la conducción del calor. En 1797 Fourier sucedió a Lagrange para dirigir el curso de análisis y mecánica y en 1798 publicó su primer artículo en el *Journal de l'École Polytechnique.*

CAPÍTULO 2

Un debate acalorado

En diciembre de 1807 Fourier presentó ante la Academia de Ciencias de París una memoria sobre la propagación del calor en cuerpos sólidos. No se trataba de una cuestión menor o un pequeño cambio sobre el trabajo de otros: por el contrario, este problema requería una nueva teoría sobre la que apoyarse. Al abordarlo, con más imaginación que rigor, Fourier inauguró una nueva era en física. De hecho, este trabajo —y lo que vino después— le convirtió en uno de los fundadores de la física matemática.

A principios de 1798, Fourier recibió una carta del ministro del interior. La carta no dejaba margen de duda. No era una invitación que pudiera rechazar, sino que era una orden que le invitaba a preparar sus cosas porque había sido reclutado para una misión en la cual la república le requería:

> Ciudadano, el Directorio Ejecutivo tiene en las presentes circunstancias una necesidad particular de sus talentos y su celo, por lo que ha dispuesto de usted para beneficio del servicio público. Debe prepararse y estar dispuesto para partir a la primera orden. Si actualmente está usted empleado o si ocupa algún puesto a expensas de la república, lo conservará durante su misión, y el salario correspondiente se pagará a su familia.

Fourier no había solicitado este «destino». Él era feliz con sus clases en la Politécnica y con sus perspectivas, cada vez más vívidas, de entregarse a una carrera académica. Sin embargo, no tenía elección. Debió prepararse rápidamente porque la carta estaba fechada el 27 de marzo, y el 19 de mayo embarcó en Tolón, junto a Napoleón, un reducido grupo de oficiales y un ejército de más de 30 000 hombres. A pesar de la magnitud del evento, muy pocas personas conocían el destino de la flota. Iban camino de Egipto.

Todo se había organizado en poco más de un mes. La persona encargada de reclutar a Fourier fue el matemático francés Gaspard Monge, quien también participaba en la campaña. El viaje que Napoleón tenía en mente, y que había sido aprobado y ordenado por el Directorio, no era meramente una campaña militar. No se trataba solo de conquistar nuevas tierras o añadir una nueva victoria a su ya abultado currículum militar. De hecho, en el trasfondo, se adivinaba un brillante cálculo político. Sus éxitos anteriores empezaban a preocupar a los que ostentaban el poder en París, hecho del que él era consciente. Para muchos de los miembros del Directorio, se estaba convirtiendo más en una amenaza que en un aliado. Se le había propuesto que abordara la conquista de Inglaterra, pero Napoleón era conocedor de la superioridad, en el mar, de la armada del vicealmirante Horatio Nelson (1758-1805). No quería fracasar, así que pensó en otras posibilidades. Se le ocurrieron dos: atacar Hanóver —que era, aparentemente, la más razonable de las propuestas— y conquistar Egipto. Esta última opción tenía mucho de locura, porque requería todo un ejército y porque, en realidad, la información de la que disponían sobre el «enemigo» era escasa e incierta. Pero Napoleón vio en Egipto la salida ideal a una crisis anunciada. Su marcha le alejaría de París mientras la situación política local se enrarecía sola, sin que él pudiera verse afectado. Además, el pueblo, que le adoraba, alimentaría su idolatría por él al visualizarle en Oriente, esa región repleta de misterios que entonces estaba tan de moda gracias a ciertas obras de teatro. Por otro lado, en el Directorio se sentirían aliviados al ver cómo se alejaba. El único problema era, por tanto, esquivar a Nelson en el Mediterráneo.

La reciente incorporación al Instituto de Francia de Napoleón como miembro de la clase de Ciencias Físicas y Matemáticas le animó a incluir entre sus intereses la exploración científica y el estudio del arte y la cultura del territorio mediante la creación de una institución análoga en Egipto. Por eso se encontraban entre la tripulación personas como Fourier o Monge, que carecían de experiencia militar pero disponían de buenos conocimientos científicos y de una actitud abierta ante lo nuevo.

LA CAMPAÑA DE EGIPTO

Durante el viaje, Napoleón organizaba reuniones con unos pocos miembros de la tripulación cuyo mandato inmediato era constituir una Comisión de las Artes y de las Ciencias en Egipto. Por supuesto, Fourier formaba parte del grupo. Fue así como Napoleón contactó con él. En estos encuentros se discutía sobre arte, astronomía, literatura y matemáticas, entre otros temas, y Napoleón se percató rápidamente del talento natural que Fourier tenía para la administración, lo que le convertía en alguien de especial valor.

Los servicios de espionaje británicos habían informado al comandante Nelson sobre el paso de la armada francesa por el Mediterráneo. Ahora bien, la información era incompleta: nadie sabía el destino de la flota. Así pues, Nelson tuvo que peinar la zona en su busca. El 22 de junio, ambas armadas se encontraban a tan solo dos millas de distancia, pero una espesa niebla evitó que se vieran y, con ello, también el enfrentamiento. Los franceses ocuparon la isla de Malta y, a continuación, tras una breve incursión, ganaron la ciudad de Alejandría. El siguiente objetivo sería El Cairo. En su avance por el desierto, los soldados, que no estaban preparados adecuadamente para este tipo de travesía, sufrieron lo indecible, hasta el punto de que hubo deserciones y, en algunos casos, suicidios. Aun así, el 21 de julio Napoleón se enfrentó al ejército de los mamelucos en la famosa batalla de las Pirámides, que fue una masacre. El 24 de julio los franceses entraron triunfantes en El Cairo.

Pero la alegría duró poco, porque el 1 de agosto Nelson localizó la flota francesa en Abukir y la borró del mapa, dejando a los franceses incomunicados. El francés Étienne-Louis Malus (1775-1812), uno de los físicos que pertenecían a la comisión científica, describió posteriormente cómo se sintieron al recibir la noticia: «Nos dimos cuenta de que toda comunicación con Europa estaba rota. Comenzamos a perder la esperanza de volver a ver algún día nuestra tierra natal». Además, cuando la noticia llegó al Directorio, decidieron no enviar ayuda.

El aislamiento de Francia impulsó a Napoleón a continuar la conquista por el interior, rumbo a Siria. Venció en Gaza y

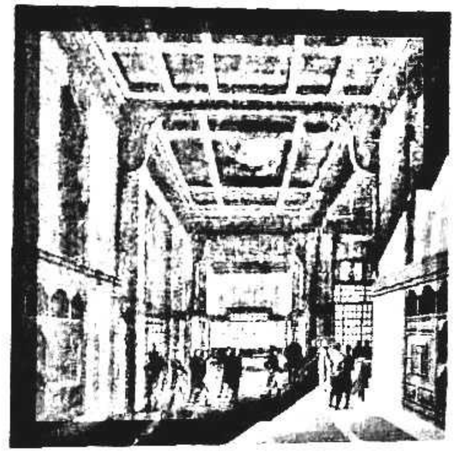
Jaffa, pero, al llegar a San Juan de Acre, cayó derrotado. Cuando regresó a El Cairo, el 14 de junio de 1799, a Napoleón solo le acompañaban las dos terceras partes de los hombres que habían partido con él. Luego, en Abukir, logró la retirada de los turcos. Pero entonces Napoleón se enteró de que la situación política en Francia se desestabilizaba rápidamente y varios generales planeaban un golpe de Estado. Además, una segunda coalición, encabezada por Austria y Rusia, amenazaba con una nueva invasión del país. A la vez le llegó el rumor de una posible infidelidad de su esposa. Todo ello, en conjunción con el hecho de que su ejército no podía reabastecerse de municiones, precipitó la decisión de volver. Napoleón se escapó sigilosamente, abandonando su puesto y dejando al mando, como comandante en jefe, y con órdenes de resistir al enemigo el mayor tiempo posible, al general Jean-Baptiste Kléber (1753-1800). Comunicó su decisión solamente a aquellos que iban a acompañarle: unos pocos generales y los científicos Claude Louis Berthollet (1748-1822) y Monge. No tuvo valor para hablar personalmente con Kléber, pues temía que se negara a asumir el mando de las tropas y le complicara el regreso. Solo dejó una carta con el nombramiento y algunas instrucciones.

De todas formas, poco antes de producirse, se propagó el rumor de su huida y, en una reunión del Instituto de El Cairo, Monge y Berthollet tuvieron que desmentir estos rumores. Fourier estaba muy preocupado. No quería que le abandonaran y resultó difícil tranquilizarle. Pero Napoleón y los suyos desaparecieron el 18 de agosto de 1799, hecho que Fourier nunca olvidaría. Un mes después, tras su desembarco en Francia, el 18 de septiembre, Napoleón dio un golpe de Estado que puso fin al Directorio y se erigió primer cónsul.

El 14 de junio de 1800, Kléber murió asesinado por un sicario otomano. Su sucesor, el general Jacques-François Menou (1750-1810), intentó congraciarse con la población poniendo fin a las acciones represivas. Quería convertir Egipto en un Estado nacional bajo el protectorado de la Francia revolucionaria, en el que los notables locales administraran el país sin depender de los turcos y los mamelucos. Encargó a Fourier que atendiera

las quejas de los habitantes locales, y este demostró tener una excelente mano izquierda en el trato con la población egipcia. Quizá lo más destacable es que justo en uno de los momentos de mayor debilidad de las tropas francesas, Fourier firmó un pacto de alianza con Murad Bey (ca. 1751-1801), el líder de los mamelucos. El 21 de marzo de 1801, el ejército británico desembarcó en Abukir y derrotó a los franceses. Sitiado en Alejandría, el 30 de agosto, Menou se vio forzado a capitular.

EL INSTITUTO DE EL CAIRO



En lo referente a crear en Egipto una institución análoga al Instituto de Francia, Napoleón cumplió su objetivo al fundar el Instituto de El Cairo en agosto de 1798. Su creación se ordenó el 20 de agosto y en la primera reunión se eligió como presidente del instituto a Monge, vicepresidente a Napoleón y secretario perpetuo a Fourier. Monge contó con el apoyo de Fourier para poner en marcha el proyecto. El instituto tenía tres objetivos fundamentales: fomentar el progreso y el conocimiento de las ciencias, recopilar y publicar todos los datos posibles sobre Egipto, tanto desde el punto de vista natural, geográfico, cultural, etc., como artístico, y, por último, estar al servicio de los intereses militares de Francia. Fourier se ocupó, ante todo, de las cuestiones administrativas, pero también redactó algunos artículos matemáticos y otros vinculados a cuestiones de ingeniería, además de participar en varias expediciones. Concretamente, en 1799 viajó con Berthollet, a las órdenes del general Antoyne-François Andréossy, al lago Natron y, poco después del regreso de Napoleón a Francia, lideró junto a Louis Costaz una exploración en el Alto Egipto. A la vuelta de esta expedición se le encomendó la recopilación y publicación de los descubrimientos que se habían realizado, lo cual fue el punto de arranque para la monumental obra literaria y científica que se publicó en Francia, a partir de 1810 y hasta 1829, bajo el título *Descripción de Egipto*, que ocuparía un total de 25 volúmenes, y de la cual Fourier redactó la introducción histórica y se encargó de la edición.

FOURIER, PREFECTO DE ISÈRE

Una vez en París, Fourier ocupó nuevamente su plaza de profesor en la Escuela Politécnica, donde podría, por fin, despuntar académicamente. Sin embargo, el destino tenía otras cartas preparadas para él. Al poco tiempo, Napoleón, en su nueva posición de primer cónsul, escribió a Berthollet, que entonces era senador, la siguiente nota:

> Ciudadano senador: Habiendo fallecido recientemente el prefecto del Departamento de Isère, me gustaría proporcionar un anticipo de mi confianza al ciudadano Fourier, nombrándole para dicho puesto. Por favor, hágame el favor de hablar con él y hágame saber si esto responde a sus expectativas.

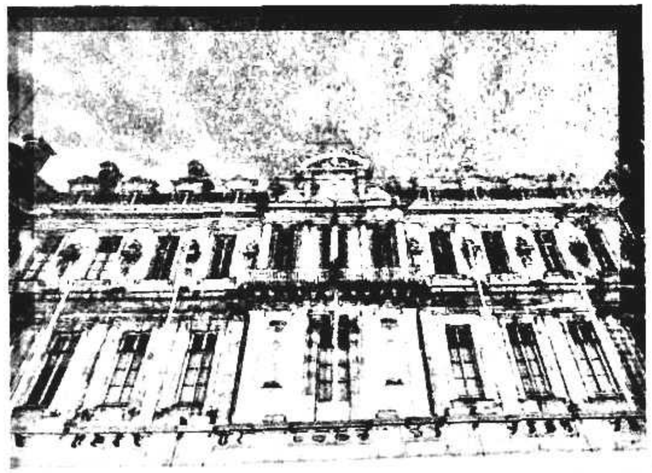
Fourier deseaba ocupar una posición relevante en el nuevo gobierno o, a ser posible, en un puesto importante a nivel académico, y pensó que, si rechazaba este puesto, se cerraría las puertas a cualquier otra oportunidad. Así que, sintiendo mucho que le alejaran de París, donde, por encima de cualquier otra cosa, valoraba la compañía de otros matemáticos de prestigio, Fourier aceptó el encargo y se resignó a vivir en Grenoble, capital del Departamento de Isère, en la parte francesa de los Alpes.

La campaña de Egipto había dejado una importante huella en su salud. Se había aclimatado a ese país, y el frío y la humedad del nuevo hogar le causaban dolores reumáticos. Adquirió la costumbre de mantener sobrecalentadas las estancias que ocupaba y nunca salía al exterior sin llevar puesto un abrigo, ni siquiera en los días más calurosos. A menudo se hacía acompañar por un sirviente que le llevaba otro abrigo de repuesto, por si consideraba necesario embutirse en ambos. Detestaba el frío. Para él, Grenoble, cuyos inviernos son mucho más severos que los de París, era el lugar de nacimiento del reuma. No es de extrañar que, mientras vivía allí, se interesase por el problema físico de la conducción del calor. Concretamente, le preocupaba la pérdida de calor como consecuencia de la propagación en sólidos y de la radiación en el espacio, y pensó muy profundamente en el problema de la conservación del calor, tema del que realizaría importantes sugerencias en su *Teoría analítica del calor*. Estas cuestiones no pudieron estar alejadas de sus pensamientos por mucho tiempo.

A pesar de la enorme actividad que implicaba su posición como prefecto, Fourier encontró tiempo para el trabajo intelectual y el estudio. Tenía esperanzas de encontrar algunos resultados importantes por sí mismo, sin ayuda de nadie. Y su obsesión por el calor pronto dio sus frutos. El 21 de diciembre de 1807 presentó ante la Academia de Ciencias una memoria titulada *Teoría de la propagación del calor en los sólidos*, considerada actualmente como el documento fundacional del análisis de Fourier. En ella puede encontrarse una buena parte de los resultados que conformarían la que se considera obra maestra de Fourier, la *Teoría analítica del calor*, publicada en 1822. La diferencia más importante entre ambas es que en la primera memoria no se incluye la llamada «transformada» de Fourier.

LOS DEPARTAMENTOS FRANCESES

En 1790 la Asamblea Constituyente eliminó las provincias del antiguo régimen y dividió el país en 83 regiones a las que llamó departamentos. Estos estaban liderados por una asamblea electa, la cual nombraba un consejo general de 36 personas y un procurador síndico que representaba al rey. Durante el gobierno revolucionario se acusó a las asambleas y a sus consejos generales de mantener buenas relaciones con los girondinos, por lo que se envió a cada departamento un comisionado general que dependía del gobierno central y que debía velar por el buen funcionamiento de las asambleas. Napoleón eliminó todo este sistema y dejó en cada departamento a un único representante del gobierno, el prefecto, quien tenía, por tanto, un enorme poder. Ese fue el puesto asignado a Fourier en Isère, departamento de la región de Ródano-Alpes.



Vista del edificio de la Prefectura de Isère, en Grenoble.

Fourier entregó su memoria al secretario de la Academia, Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749-1822), quien nombró la comisión que decidiría si dicho trabajo merecía ser publicado. La comisión elegida se adaptaba perfectamente a los intereses de Fourier, pues en ella estaban Monge, Lagrange y Laplace, con quienes tenía buenas relaciones, y Sylvestre François Lacroix (1765-1843). Se sabe que Fourier admiraba profundamente a Lagrange y es de suponer que este le correspondía. Monge era un buen amigo que estaba en deuda con él tras enrolarle en la campaña de Egipto y, posteriormente, haber huido con Napoleón cuando las cosas se pusieron feas. La relación de Laplace con Fourier era aparentemente buena y, además, dada la posición que ocupaba Fourier en Francia en aquel momento y la demostrada debilidad de Laplace por los poderosos, no cabía esperar una firme oposición. Tampoco Lacroix tenía nada contra Fourier.

LA NATURALEZA DEL CALOR

Antes de avanzar con los detalles de la memoria de Fourier, así como el debate que esta suscitó, vale la pena explicar brevemente algunos aspectos elementales de la física del calor. El problema de la naturaleza del calor es antiguo. Sin embargo, hasta mediados del siglo XVIII las discusiones en torno a este fenómeno fueron casi siempre de corte filosófico. Entonces Antoine-Laurent Lavoisier (1743-1794), el gran químico francés, formuló la tesis de que el calor es una entidad física cuya cantidad puede medirse de la misma forma que se calcula el volumen del agua o el peso de la tierra. Concretamente, en referencia a los cambios de estado de la materia, afirmó: «Es difícil concebir estos fenómenos sin admitir que son el efecto de una sustancia material real, un fluido muy sutil que puede penetrar entre las moléculas de todos los cuerpos, dispersándolas». Es así como introdujo la idea del «calórico», un fluido imponderable que podía penetrar los cuerpos para proporcionarles calor. Cuanto más calórico contenía un cuerpo, mayor era su temperatura. Además, el estado de un cuerpo (sólido, líquido o gaseoso) dependía exclusivamente de la cantidad de calórico que contenía, que separaba sus moléculas. Esto explicaba, por ejemplo, el hecho conocido de que, en general, los cuerpos aumentan de volumen cuando su temperatura se incrementa. Además, la transferencia de calor desde los cuerpos calientes a los fríos se justificaba con el argumento de que los primeros, al entrar en contacto con cuerpos fríos, les ceden parte de su calórico, de forma similar a lo que sucede con las concentraciones de sales o de iones en los fluidos cuando estos entran en contacto. La teoría material del calor de Lavoisier fue muy discutida, como posteriormente lo fue la del éter. Pero durante mucho tiempo los físicos utilizaron el calórico, aunque solo fuera para explicar algunas de las observaciones que forman parte de la experiencia cotidiana con el calor. El propio Lavoisier afirmaría a este respecto: «Incluso admitiendo que la existencia de este fluido sea una mera hipótesis, explica los fenómenos naturales de una forma muy satisfactoria». El apoyo a la teoría del calórico fue, quizá, mayor de lo que cabría esperar, por el peso de autoridad que suponía que su creador fuera precisamente Lavoisier, el fundador de la química moderna. El aspecto más polémico de la teoría era su naturaleza material: el calórico era una sustancia que no podía crearse ni destruirse, lo cual contradice algunas experiencias. Por ejemplo, en 1798 el físico norteamericano Benjamin Thompson (1753-1814) demostró en varios experimentos que el calor se puede crear mediante fricción. Después de todo, al frotar las manos, las calentamos. Pero fueron los extremadamente cuidadosos experimentos diseñados por el físico británico James Prescott Joule (1818-1889) en 1843 los que acabaron de convencer a los escépticos de que el calor no puede ser una sustancia, al relacionar de forma inequívoca calor y trabajo.

Actualmente se acepta la teoría cinética (o mecánica) del calor, según la cual este es una forma de energía que está asociada al movimiento de los átomos y las moléculas de las distintas sustancias. En pocas palabras, el calor es la forma de energía que se puede transferir espontáneamente de una sustancia a otra como resultado de la diferencia de temperatura entre ambas. La transferencia se produce siempre desde la sustancia de mayor temperatura hacia la de menor temperatura, y finaliza cuando ambas

alcanzan la misma temperatura, momento en el que se produce un estado de equilibrio térmico.

Hay dos aspectos fundamentales a destacar en este contexto: el primero, que es objeto de estudio de la termodinámica, es conocer la cantidad de calor que se va a transferir; el segundo, que es el aspecto al que Fourier dedicó sus investigaciones, es descubrir la razón (o velocidad) con la que se produce dicha transferencia. Las transferencias de calor se producen de tres formas distintas: conducción, convección y radiación. La conducción se produce tanto en sólidos como en líquidos y gases. En gases y líquidos se debe a las colisiones y a la difusión de las moléculas en su movimiento aleatorio. En los sólidos se debe a las vibraciones de las moléculas en una retícula y al movimiento de electrones libres que, de este modo, transportan energía. Esta es precisamente la razón por la que el calor se conduce mejor en aquellos sólidos que conducen bien la electricidad. La convección resulta del proceso de transferir calor entre diferentes zonas de un fluido que se mueve. Este proceso es, por tanto, el resultado combinado de un proceso de conducción pura, en conjunción con el movimiento del fluido. Cuando el fluido no se mueve, la transferencia se debe exclusivamente al fenómeno de conducción. Con el fluido en movimiento, la velocidad de transferencia se incrementa, pero desde el punto de vista matemático el proceso se complica de manera sustancial. Finalmente, el calor se puede transmitir en forma de radiación, que es la energía emitida por la materia en forma de ondas electromagnéticas (o fotones) como resultado de ciertos cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas. El proceso de radiación no requiere que intervenga ningún medio de transmisión físico, como sucede en los procesos de conducción o convección, pues las ondas electromagnéticas pueden viajar por el vacío. La velocidad de transferencia es, en este caso, la velocidad de la luz (en el vacío). Este es el mecanismo mediante el cual recibimos la energía del sol.

Las diferentes memorias que Fourier redactó sobre el calor a lo largo de su vida se dedicaron exclusivamente al fenómeno de la transferencia del calor por conducción en sólidos conductores, aunque en las mismas también se incluyen reflexiones sobre otros fenómenos como la radiación. En todo caso, Fourier nunca se

preocupó especialmente por la naturaleza del calor. A él le interesaba deducir las leyes matemáticas a las que este se ajusta y, posteriormente, resolver las correspondientes ecuaciones con el objetivo de realizar predicciones precisas.

Es necesario destacar que, en la época en la que Fourier escribió sus trabajos, estaba en plena vigencia la teoría material del calor. De hecho, el establecimiento y aceptación final de la teoría cinética del calor requirió la intervención de numerosos científicos de primer nivel, como Rudolf Clausius (1822-1888), James Clerk Maxwell (1831-1879) y, posteriormente, Ludwig Boltzmann (1844-1906) y Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Supuso el nacimiento de la termodinámica y de la mecánica estadística, y tuvo que esperar su confirmación definitiva hasta que primero, en 1905, Albert Einstein (1879-1955) publicara su trabajo sobre el movimiento browniano —movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido— y, posteriormente, Jean Perrin (1870-1942) realizara sus experimentos, confirmando que la materia está constituida por moléculas, por lo que recibió el Premio Nobel de Física en 1926. Nada de esto estaba al alcance de Fourier. Su aproximación al fenómeno tuvo que ser, por tanto, ingenua. Aun así, fue capaz de deducir las ecuaciones fundamentales que rigen el fenómeno de conducción.

LA ECUACIÓN DEL CALOR Y LAS SERIES DE FOURIER

Fourier orientó sus intereses de forma definitiva hacia el problema de la distribución del calor en sólidos conductores cuando ya vivía en Grenoble, en 1802. Además, su interés quedó fuertemente estimulado a partir de la lectura, en 1804, de un artículo del físico, astrónomo y matemático Jean-Baptiste Biot (1774-1862) en el que se estudiaba el problema para el caso de una barra metálica delgada y muy larga que se calienta desde uno de sus extremos. De hecho, fue el propio Biot quien le había enviado el manuscrito. En él se utilizaba la ley de enfriamiento de Newton, la cual afirma que la cantidad de calor intercambiada por dos cuerpos que se ponen en contacto es proporcional a la diferencia de sus temperaturas. Además, introducía, por primera

ANTOINE-LAURENT DE LAVOISIER (1743-1794)

Antoine-Laurent de Lavoisier fue un químico, biólogo y economista francés. Se le considera, junto a su esposa, Marie-Anne Pierrette Paulze (1758-1836), el creador de la química moderna. Realizó contribuciones fundamentales al estudio de la oxidación de los cuerpos, la respiración animal, el análisis del aire y la fotosíntesis. Además, a él se deben la ley de conservación de la masa, que también lleva el nombre de Lomonósov (1711-1765), la teoría material del calor y el estudio de la combustión como proceso de oxidación. En su *Tratado elemental de química*, publicado en 1789, introdujo la idea de elemento químico, y propuso una teoría sobre la formación de los compuestos a partir de los elementos. Otras obras importantes fueron *Memoria sobre la combustión* (1777) y *Consideraciones generales sobre la naturaleza de los ácidos* (1778). Participó en el cobro de contribuciones, lo que le condujo a ser arrestado en 1793 y, aunque numerosas personalidades del mundo de la ciencia se manifestaron en su favor ante el tribunal que le juzgaba, este no tuvo piedad y decidió su condena a muerte. Lavoisier fue guillotinado el 8 de mayo de 1794. Al día siguiente, Lagrange manifestó: «Ha bastado un instante para cortarle la cabeza, pero Francia necesitará un siglo para que aparezca otra que se pueda comparar».

Retrato de Lavoisier y su esposa, Marie-Anne Pierrette, realizado por J.L. David (1788).

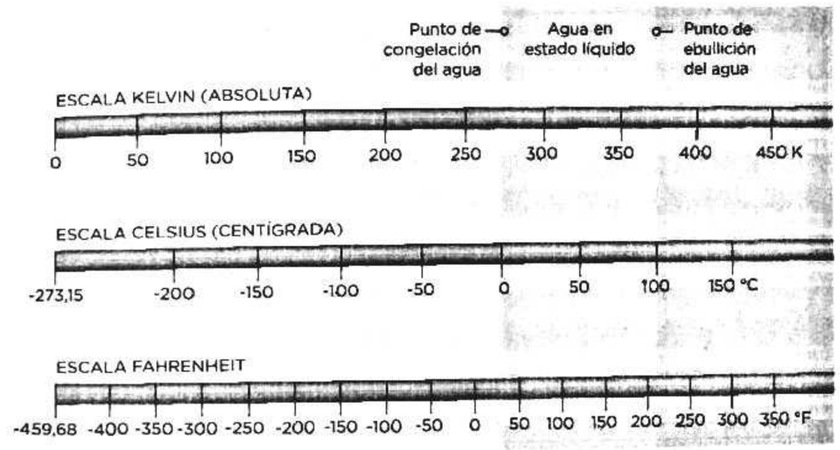
vez, una distinción entre el fenómeno físico que describe el intercambio de calor que se produce entre la superficie de la barra metálica y el aire, y el que tiene lugar en el interior de la barra. Sin embargo, a pesar de disponer de los elementos adecuados, Biot había fallado a la hora de deducir la ecuación correcta del calor, y su trabajo tenía en realidad un valor más cualitativo que cuantitativo, más experimental que analítico. Además, llegaba a algunas conclusiones erróneas y, a pesar de incluir algunas citas históricas relacionadas con el problema en cuestión, no citaba dos trabajos fundamentales sobre cuya existencia Fourier se percató tiempo después, lo cual le causó un enorme enfado, pues creía que Biot los había ocultado deliberadamente. Concretamente, se trata de las aportaciones realizadas por el físico e inventor francés Guillaume Amontons (1663-1705) y por el matemático y científico Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Amontons había utilizado, a modo de termómetro, las variaciones de temperatura en una barra metálica calentada desde uno de sus extremos para determinar los puntos de fusión de varios metales. Él había asumido que la temperatura decrece linealmente con la distancia al punto desde el que se calienta la barra, lo cual es erróneo. Posteriormente, Lambert había logrado una visión general del problema mucho más ajustada a la experiencia. En particular, encontró argumentos plausibles a favor de un decrecimiento logarítmico de la temperatura con la distancia, además de incluir entre sus explicaciones la discusión de la pérdida de calor a través del aire, así como el concepto de estado estacionario.

> «Fourier tenía por cierto que todo fenómeno natural se deja captar en forma matemática, que es posible explicar sus relaciones a plena satisfacción con la ayuda del análisis.»
>
> — Felix Klein.

Fourier, que conocía la mecánica celeste de Lagrange y las contribuciones de Daniel Bernoulli al problema de la cuerda vibrante, había elaborado algunos cálculos antes de recibir el trabajo de Biot, basados en un modelo discreto, parecido al modelo del collar de cuentas utilizado por Lagrange para la ecuación de ondas unidimensional. Lo más probable es que Biot fuera conocedor de este trabajo de Fourier y que esa fuera la razón por la que le envió su artículo. El modelo discreto era algo artificial, pero contaba con dos importantes alicientes. Para empezar, se insertaba dentro de una técnica aceptada, con la cual los matemáticos de la época estaban familiarizados. Por otra parte, con este modelo fue capaz de deducir la expresión general de la solución e incluso demostró algunas de sus propiedades cualitativas. Sin embargo, en su estudio aparecían ciertos coeficientes que no pudo hallar, excepto para los poco interesantes casos especiales

EL CÁLCULO DE LA TEMPERATURA

La temperatura se calcula poniendo en contacto un termómetro con el material cuya temperatura deseamos conocer. El termómetro contiene una sustancia o elemento que, al cambiar de temperatura, se dilata o se contrae —tal es el caso de los termómetros de mercurio— o modifica sus propiedades eléctricas —termómetros eléctricos—, lo cual permite asignar un valor numérico a la temperatura siguiendo algún tipo de escala. Hay varias escalas de temperatura, siendo la escala Celsius la más común y, de hecho, la utilizada por Fourier en sus investigaciones. Esta se define a partir de los puntos de ebullición y congelación del agua (100 °C y 0 °C, respectivamente). En la escala Fahrenheit, los puntos de congelación y ebullición del agua son 32 °F y 212 °F. Ahora bien, para la termodinámica es importante utilizar una escala absoluta, basada en la consideración de que existe un nivel mínimo (inalcanzable) o cero absoluto para la temperatura y, por tanto, esta magnitud admite solo valores positivos. La escala absoluta más popular es la escala Kelvin, cuyos grados son equiparables en magnitud a los grados Celsius y para la cual el agua se congela a 273,15°K. Desde el punto de vista de la termodinámica, la temperatura es una magnitud física que no se ve modificada cuando ponemos en contacto dos sistemas que se encuentran en equilibrio térmico, al eliminar la frontera adiabática —la que no permite el paso del calor entre los medios que separa— que antes los mantenía separados. Si tenemos en cuenta que la energía está cuantizada y, por tanto, cada molécula de un compuesto determinado solo puede estar en un conjunto discreto de niveles de energía, el más bajo de los cuales llamamos «estado fundamental» o «estado de energía 0», podemos investigar, para sistemas que están en equilibrio térmico, las poblaciones de moléculas que se encuentran en cada estado de energía E. El físico austriaco Ludwig Boltzmann (1844-1906) demostró que estas poblaciones siguen una distribución conocida: $P_E = P_0 e^{-\beta E}$, donde P_E y P_0 denotan el número de moléculas que se encuentran en el estado de energía E y en el estado fundamental, respectivamente, y β es un parámetro que mide la temperatura. Concretamente, si T denota la temperatura medida en la escala absoluta de Kelvin, entonces $\beta = 1/(kT)$, donde $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ es la constante de Boltzmann. Según esto, la temperatura es el parámetro que nos revela cuál es la distribución más probable para las poblaciones de moléculas en los estados de energía disponibles en un sistema en equilibrio. A temperaturas elevadas, hay muchos niveles de energía que tienen poblaciones destacadas. Cuando la temperatura disminuye, solo los estados de energía cercanos al estado fundamental tienen poblaciones importantes.



Comparación de las escalas de temperatura Kelvin, Celsius y Fahrenheit.

de dos y tres masas. Cuando cambió la varilla por un anillo cerrado, Fourier completó los cálculos incluso en el caso general.

El artículo de Biot impulsó a Fourier a enfrentarse directamente al problema físico real, en el caso continuo. En su primer intento, en 1806, dedujo también una ecuación de difusión errónea. Sin embargo, al profundizar en la distinción esencial entre el comportamiento del flujo del calor dentro del sólido y en su superficie, descubrió su error, lo cual le permitió deducir la ecuación correcta. Esta ecuación es, para los puntos interiores al sólido,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

donde $u(x,y,z,t)$ representa la temperatura en el punto de coordenadas (x,y,z) en el instante de tiempo t y K es una cierta constante positiva, cuyo valor depende de las propiedades físicas del sólido. Es esta la ecuación de difusión a cuyo estudio dedicó la memoria de 1807. La ecuación se debe completar con la geometría del sólido bajo estudio, así como con la información disponible sobre la distribución de temperaturas. Estos datos pueden expresarse en términos de ciertas condiciones iniciales —es decir, a partir del valor de la temperatura en todos los puntos del sólido para un instante inicial— o de frontera. Por ejemplo, podría ser que conozcamos la temperatura en la superficie del sólido y deseemos deducir su valor en los puntos interiores, bajo ciertas condiciones adicionales, como la estacionaridad.

La ecuación del calor se escribe en términos de evolución de la temperatura en los distintos puntos del sólido bajo estudio. Pero ¿qué es la temperatura? En realidad, esta pregunta puede responderse de varias formas. Por un lado, podemos intentar explicar su significado físico. Por otro lado, podemos simplemente explicar cómo se mide, cómo se asigna un valor concreto a esta magnitud.

En la memoria de 1807, tras deducir la expresión general de la ecuación de difusión, Fourier se ocupa del problema de la distribución estacionaria de temperaturas en una lámina semi-infinita cuya superficie lateral se mantiene a temperatura constante —en matemáticas se llama semi-infinito a un dominio o región del espacio si se extiende hasta el infinito en alguna dirección concreta, pero no en todas. Por ejemplo, semirectas, semiplanos y semiespacios son objetos típicos semi-infinitos—. Concretamente, si representamos las dimensiones del objeto con los ejes cartesianos x, y, z, él asume que la lámina es extremadamente fina, por lo que podemos prescindir, para su descripción matemática, de la dimensión que define su grosor. Así, el problema se reduce a dos dimensiones y podemos eliminar el eje z. Además, el carácter semi-infinito de la lámina se traduce en imponer que sobre el eje y la lámina sea finita, acotada entre dos valores dados —que él iguala a −1 y 1, respectivamente—, y permitir que la variable x tome cualquier valor positivo.

FIG. 1

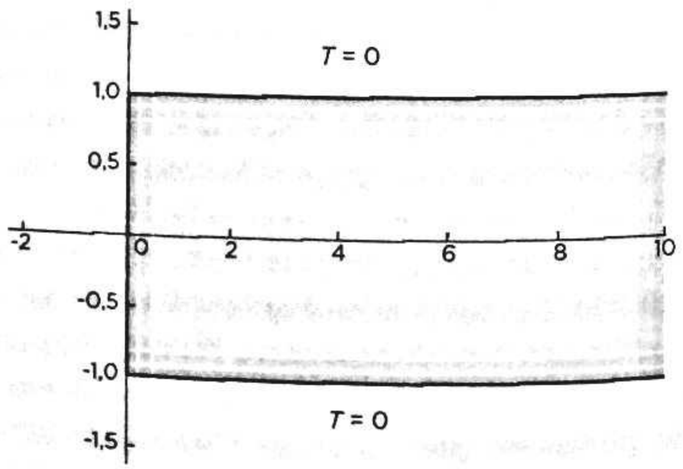


Lámina semi-infinita.

La ecuación correspondiente es, en este caso,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

con condición de contorno $u(0,y)=1$ para $y\in[-1,1]$ y $u(x,1)=u(x,-1)=0$ para $x>0$, pues el estado estacionario fuerza la igualdad

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

que es la forma matemática de decir que la función u no depende del tiempo.

La experiencia nos dice que, en efecto, si mantenemos constante la distribución de temperaturas sobre el borde de un cuerpo, con el transcurso del tiempo este alcanzará un estado de equilibrio térmico —o estado estacionario—, en el que la temperatura en cada punto permanecerá constante y, por tanto, el problema planteado tiene pleno sentido físico. Se trata del primer problema para cuya solución Fourier empleó el método de separación de variables y, por tanto, tiene un valor histórico especial.

Esta técnica consta esencialmente de dos etapas. En la primera, se trata de localizar las soluciones de la ecuación que se pueden descomponer como un producto de funciones con las variables «separadas». Es decir, en nuestro caso asumimos que $u(x,y)=X(x)Y(y)$ resuelve la ecuación para ciertas funciones $X(x)$, $Y(y)$. Estas funciones son especialmente útiles porque para ellas el cálculo de las derivadas parciales es sencillo. Si introducimos una función de este tipo en la ecuación que estamos considerando, tras realizar las correspondientes operaciones de derivación, podemos separar a uno y otro lado de la igualdad dos expresiones que, dependiendo de variables distintas, coinciden sin embargo en todo punto. De este modo, la ecuación original se transforma en el par de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases},$$

donde λ representa un parámetro cuyo valor debemos determinar.

Estas ecuaciones, en conjunción con las condiciones de frontera $u(x,1)=u(x,-1)=0$ y el hecho de que el calor debe disiparse cuando nos alejamos del borde $x=0$, fuerzan las igualdades

$$X(x) = ae^{\frac{-(1+2n)\pi}{2}x} \text{ y } Y(y) = b\cos\left(\frac{(1+2n)\pi}{2}y\right)$$

para ciertas constantes a,b y cierto número natural n.

Las funciones que se han hallado tras imponer que las variables estén separadas son solo una clase muy particular de soluciones de la ecuación. Ahora bien, la ecuación del calor es lineal. Es decir, se puede comprobar de forma muy sencilla que si se suman dos soluciones de la ecuación la nueva función también resuelve la ecuación, y lo mismo sucede si se multiplica una solución cualquiera por una constante. Esto significa, pues, que a partir de las soluciones particulares que acabamos de obtener, las que tienen las variables separadas, podemos formar gran cantidad de nuevas soluciones porque el problema físico que estamos estudiando satisface un principio de superposición. Así pues, en una segunda etapa, forzamos que la solución general se descomponga como superposición, probablemente infinita, de soluciones como las que acabamos de calcular. Es decir, se fuerza la igualdad:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{-(1+2n)\pi}{2}x} \cos\left(\frac{(1+2n)\pi}{2}y\right).$$

Es precisamente en este punto donde aparecen las series trigonométricas, ya que estas son necesarias para el cálculo de los coeficientes a_n. De hecho, se obtienen a partir de imponer la con-

UNA ECUACIÓN IMPORTANTE

La ecuación $X''-\lambda X=0$, donde λ es una constante, aparece con frecuencia como resultado de aplicar el método de separación de variables a las ecuaciones de la física matemática y, por tanto, requiere ser estudiada en detalle. Se puede demostrar que sus soluciones forman un espacio vectorial de dimensión dos, pero el tipo de funciones que dicho espacio contiene depende del valor de la constante λ. El caso menos interesante es $\lambda=0$, que produce soluciones del tipo $X(x)=ax+b$. Si $\lambda>0$, las soluciones son

$$X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Finalmente, si $\lambda<0$, las soluciones tienen la forma

$$X(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Cuando, en un contexto físico, nos encontramos con esta ecuación, suele venir acompañada de ciertas restricciones adicionales, determinadas por las condiciones de frontera y por la física. Al imponer dichas restricciones sobre la solución general de la ecuación, se limitan los posibles valores de la constante λ a un conjunto reducido de constantes, que reciben el nombre de «valores propios» del problema. Estos valores suelen proporcionar información relevante desde el punto de vista físico. Por ejemplo, en el caso de la cuerda vibrante, son estos valores los que determinan los modos normales de vibración. En el caso de la distribución estacionaria del calor en la lámina semi-infinita, tras la aplicación del método de separación de variables obtenemos el par de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases}.$$

El cálculo de los valores propios nos lleva, en este caso, a la conclusión de que

$$\lambda = \frac{(1+2n)^2\pi^2}{4}$$

para cierto número natural n. Se sigue que, en el caso del problema estacionario para la lámina semi-infinita, las soluciones de la ecuación que tienen las variables separadas son forzosamente de la forma

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = a_n e^{\frac{-(1+2n)\pi}{2}x} \cos\left(\frac{(1+2n)\pi}{2}y\right)$$

para cierta constante a_n.

dición de fonrtera $u(0,y)=1$, que nos conduce a la igualdad

$$1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{(1+2n)\pi}{2}y),$$

que debe ser satisfecha para los valores de la variable y que se encuentran entre los valores -1 y 1.

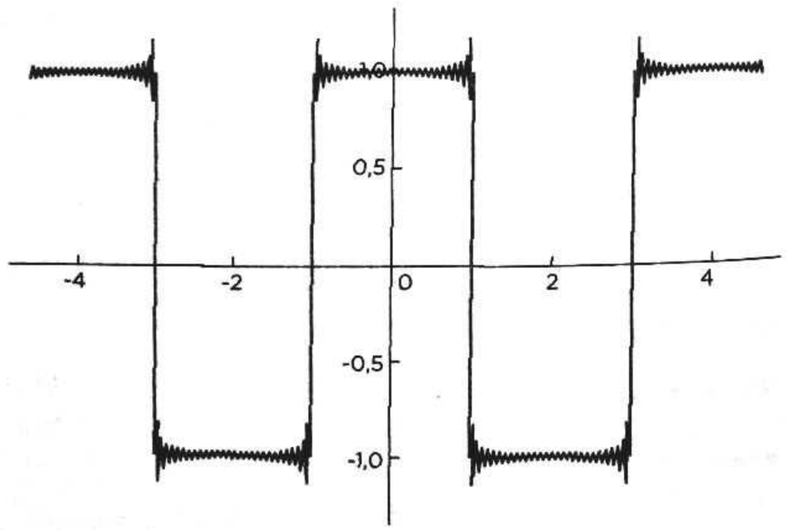
Seguro que el cálculo explícito de los coeficientes a_n que satisfacen la ecuación anterior no fue sencillo. En una auténtica demostración de fuerza, Fourier dedujo que, en este caso concreto, los coeficientes

$$a_n=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+2n}$$

resuelven el problema.

Para encontrar estos valores calculó, derivando término a término, las derivadas primera, segunda, tercera, etc., de la serie que aparece en el segundo miembro de la ecuación, luego sustituyó $y=0$ en cada ecuación, lo que le llevó a un sistema infinito de ecuaciones lineales.

FIG. 2



Suma de los primeros 26 términos de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{(1+2n)}\cos(\frac{(1+2n)\pi x}{2})$$

Ahora bien, resolver un sistema de este tipo requería inventar un mecanismo apropiado que se apoyara en la solución de sistemas lineales finitos, que eran los que entonces se sabían manejar. Fourier hizo lo propio. Concretamente, resolvió de forma inductiva los sistemas de ecuaciones que aparecen cuando consideramos solamente las primeras n variables y las primeras n ecuaciones del sistema infinito que estaba considerando y, tomando límite para $n\to\infty$, dedujo la solución general de dicho sistema. Las soluciones que había calculado tenían todas la forma de un cociente de productos infinitos. Entonces supo aprovechar la fórmula del matemático inglés John Wallis (1616-1703),

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\right)$$

para reducir todos los coeficientes que había obtenido a los múltiplos de $1/\pi$ que acabamos de anticipar:

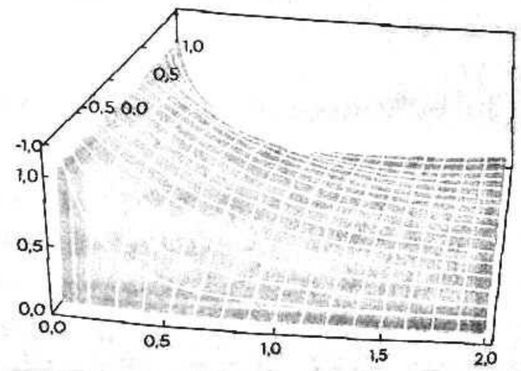
$$a_n=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+2n}$$

Obsérvese que, de paso, tomando nuevamente $y=0$ en la identidad final, y despejando, se llega a la notable identidad numérica

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+2n},$$

que era ya conocida en tiempos de Gottfried Leibniz (1646-1716).

FIG. 3



Suma de los primeros 100 términos de la solución hallada por Fourier para la lámina semi-infinita

Una vez resuelto este caso para la lámina semi-infinita, lo cual le había conducido directamente al cálculo del desarrollo en serie de cosenos para la función constante, Fourier planteó en la memoria la cuestión de qué otras funciones admiten un desarrollo de este tipo, desarrollos que, tras esta contribución, fueron bautizados en su honor. Esta cuestión no es en absoluto baladí, por lo que Fourier dedicó a su estudio el mayor de los esfuerzos, lo cual queda reflejado en las diversas técnicas que utilizó para abordarla.

El primer desarrollo general que se incluye en la memoria es una serie en senos del tipo

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Para hallar la expresión de los coeficientes b_k, Fourier considera los desarrollos de Taylor en el origen de coordenadas de $f(x)$ y de las funciones $\sin(kx)$, sustituye ambas expresiones en la ecuación que define el desarrollo en senos, reagrupa los términos para que aparezca a ambos lados de la igualdad un desarrollo en serie de potencias e iguala los coeficientes de ambos desarrollos, lo cual conduce a un sistema de infinitas ecuaciones lineales que él trunca —como ya había hecho para el desarrollo en cosenos de la constante 1—, considerando solamente las primeras n variables $b_1, b_2, \ldots, b_n$, y lo resuelve. Luego impone sobre las soluciones del sistema truncado que acaba de calcular, las cuales dependen del tamaño del sistema —que viene determinado por n— que dicho valor tienda a infinito, y, tras ciertas manipulaciones algebraicas que involucran, entre otras cosas, la comparación término a término del desarrollo de Taylor de la función $\sin(x)$ con su expresión como producto infinito,

$$\sin(x)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

llega a la expresión

$$\frac{1}{2}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k f^{(2k)}(\pi)}{n^{2k}}\right)\sin(nx).$$

Ahora, en un doble salto mortal de formalismo, Fourier considera la expresión

$$\frac{S_n(\pi)}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k f^{(2k)}(\pi)}{n^{2k}},$$

que interpreta como una «función de π» y, derivando respecto de dicha «variable», comprueba que S_n resuelve la ecuación diferencial

$$S_n+\frac{1}{n^2}S_n''=f'',$$

cuya solución general —que es conocida—, una vez evaluada en π, arroja sorprendentemente el valor correcto de los coeficientes:

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx.$$

Solo después de todas estas arriesgadas manipulaciones, Fourier se da cuenta, como ya lo había hecho Euler en su memoria de 1777, de que es posible llegar a la misma expresión usando las identidades

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kt)\sin(ht)\,dt=\begin{cases}0 & si \quad k\neq h\\ 1 & si \quad k=h\geq 1\\ 0 & si \quad k=h=0\end{cases},$$

que reciben el nombre de «relaciones de ortogonalidad» de la función seno.

Curiosamente, a pesar del uso de propiedades extremadamente exigentes para la función $f(x)$, como la analiticidad —implícita en la hipótesis de que la función coincide con su desarrollo de Taylor—, así como del abuso increíble de formalismo que hay en sus cálculos, Fourier insiste en la validez del desarrollo en serie

trigonométrica, en los intervalos apropiados, para funciones arbitrarias. Para justificarse, argumenta que los coeficientes se pueden hallar tan pronto como exista el área bajo las curvas

$$\frac{2}{\pi} f(x)\sin(kx)$$

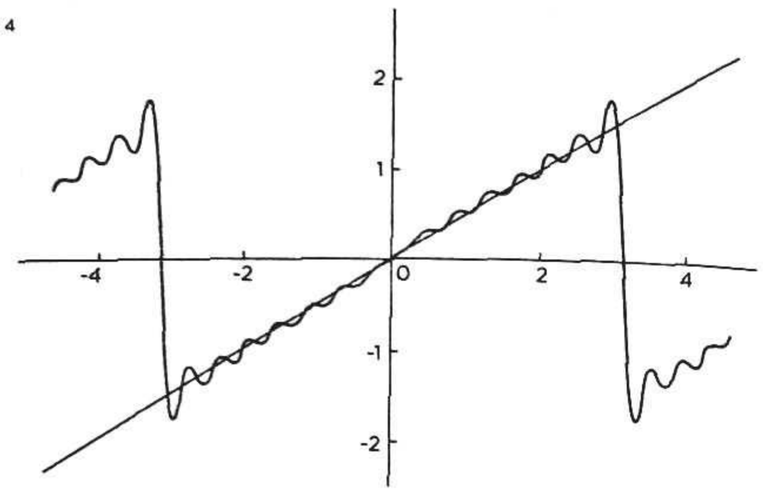
en el intervalo $[0,\pi]$, lo cual no implica hipótesis alguna sobre la suavidad de la función, que podría tener, de hecho, infinitas discontinuidades. Hay que decir que este uso de la integral como área no era usual entonces. Por el contrario, lo habitual era tratar la integración exclusivamente como proceso inverso a la derivación, de modo que también en este sentido Fourier demostraba, en su memoria, una inusual originalidad e independencia de pensamiento. De hecho, este comentario de Fourier fue el punto de partida para que posteriormente, primero Bernhard Riemann (1826-1866), luego Henri Lebesgue (1875-1941) y más tarde otros, como Arnaud Denjoy (1884-1974), Oskar Perron (1880-1975), Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950), Ralph Henstock (1923-2007) o Jaroslav Kurzweil (n. 1926) profundizaran en el concepto de integral como área, lo que condujo a las modernas teorías de integración. Es más: actualmente el análisis de Fourier y la integración de Lebesgue se suelen considerar aliados inseparables.

Además de esta razón, más o menos analítica, Joseph Fourier tenía la profunda convicción de que sus desarrollos eran necesarios y, por tanto, convergentes, por la sencilla razón de que estos aparecen de forma natural en física, bajo la forma del conocido principio de superposición, que se aplicaba desde hacía tiempo a los fenómenos ondulatorios, como el sonido, pero también en otros muchos contextos. En particular, se sabe que las siguientes palabras de Laplace, reforzando su convicción de que dicho principio es aplicable a funciones arbitrarias, le inspiraron enormemente:

> Cuando se agita ligeramente un punto de una superficie de agua en calma, se forman ondas circulares que se extienden por todas partes. Cuando la superficie se agita en otro punto, se forman nuevas ondas y se mezclan con las anteriores. Ellas viajan a lo largo de la superficie perturbadas por las ondas iniciales del mismo modo que lo harían sobre una superficie en calma, por lo que se pueden distinguir perfectamente en la mezcla. Lo que percibe el ojo con respecto a estas ondas, también lo percibe el oído con los sonidos o las vibraciones aéreas, que viajan simultáneamente sin molestarse unas a otras y producen impresiones muy diferentes. El principio de coexistencia de oscilaciones simples, que debemos a Daniel Bernoulli, es uno de esos resultados generales que nos interesan por la sencillez con la que permiten a nuestra imaginación representar los fenómenos y sus múltiples cambios. Se puede derivar con sencillez de la teoría analítica de las oscilaciones pequeñas de un sistema. Estas dependen de ecuaciones diferenciales lineales, cuya solución completa es la suma de soluciones particulares. Así, las oscilaciones simples se combinan unas con otras para formar el movimiento del sistema del mismo modo que las soluciones particulares que las representan se suman entre sí para formar la solución general. Es, por tanto, interesante identificar en los fenómenos naturales las verdades intelectuales del análisis matemático. Esta correspondencia, de la que el sistema del mundo nos ofrecerá numerosos ejemplos, representa uno de los mayores encantos vinculados a la especulación matemática.

A los principios físico-filosóficos que se acaban de mencionar debe añadirse que Fourier se había tomado la molestia de, una vez conocida la expresión de los coeficientes para el caso general, calcular numerosos ejemplos de series de Fourier —muchos de los cuales incluiría en su memoria— que, en todos los casos, mostraban excelentes propiedades de convergencia. No solo eso: él fue más consciente que cualquiera de sus predecesores de que sus desarrollos en serie tienen validez solo en ciertos intervalos, fuera de los cuales las funciones que representan deben extenderse periódicamente, de acuerdo con las propiedades de periodicidad de las funciones trigonométricas que se utilizan. Así, por ejemplo, calcula distintos desarrollos en serie de Fourier para la misma función, $f(x) = x/2$, explicando en qué sentido (es decir, dónde) la representa cada uno de ellos:

FIG. 4



$$x/2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx),$$

para $-\pi < x < \pi$. En la figura 4 se representan la función $x/2$ y la suma de los primeros 15 términos de la serie. Cuando el número de términos sumados crece, el error tiende a cero dentro del intervalo abierto $]-\pi, \pi[$.

Por otra parte, Fourier era consciente de que, dependiendo de las propiedades de paridad de la función, esta admite un desarrollo en senos, en cosenos, o requiere el uso de senos y cosenos simultáneamente. Es por ello por lo que, por ejemplo, la función $|\sin(x)|$, que representa la extensión par de la restricción al intervalo $[0,\pi]$ de la función seno, admite un desarrollo en serie de cosenos, por lo que la igualdad

$$\sin(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kx)$$

se mantiene cierta en $[0,\pi]$.

Otro aspecto del que, al parecer, también se mostró consciente, aunque no proporcionó prueba del mismo, es el teorema de Parseval, que explica la contribución de cada coeficiente de Fourier a la norma energía de la función. De todas formas, Fourier expresó explícitamente la necesidad de demostrar —dicho en términos actuales— la densidad del conjunto de las funciones trigonométricas para justificar plenamente el cálculo de los coeficientes de Fourier según las propiedades de ortogonalidad de los senos y los cosenos.

FIG. 5

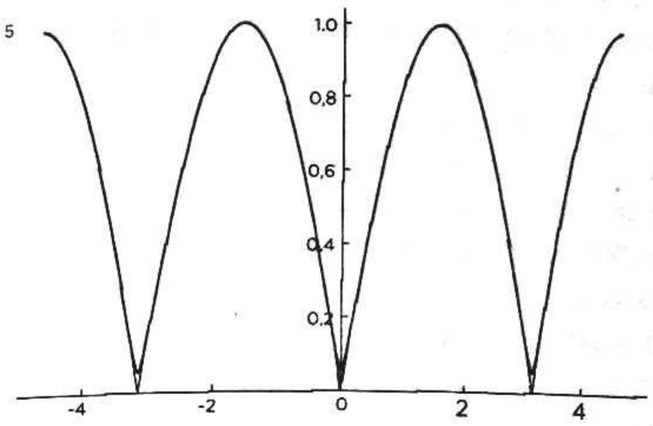
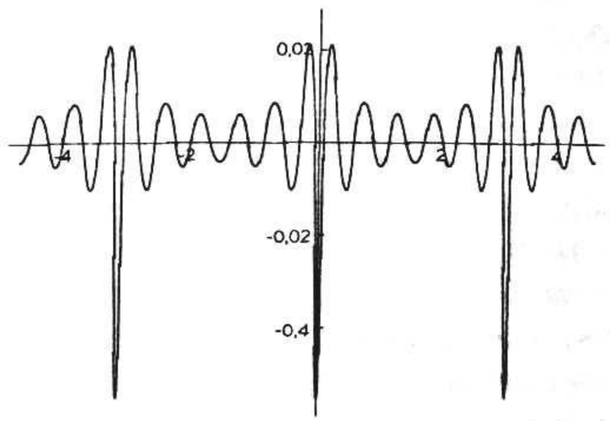


FIG. 6



En la figura 5, se ve la suma de los primeros 6 términos de la serie de Fourier de la función $|\sin(x)|$, que resulta ya casi indistinguible de esta. En la figura 6 se ha dibujado la diferencia entre ambas funciones. Cuando sumamos más términos, el error tiende (uniformemente) a cero en toda la recta.

$$\sin(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4\pi^2)} \cos(2kx) \text{ para } 0 \le x \le \pi.$$

Antes de que presentara su memoria, ya se habían calculado numerosos desarrollos del tipo

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kwt) + b_k \sin(kwt),$$

particularmente en la obra de Euler. Sin embargo, a diferencia de Fourier, aquellos que habían deducido estos desarrollos habían sido explícitamente conscientes de que los estaban calculando para funciones

analíticas —es decir, para funciones extremadamente regulares, tanto que se pueden desarrollar en series de potencias—, y tenían serias dudas sobre su validez en el caso general. ¿No era, de hecho, también necesaria la analiticidad si deseaban sustituir una función por un desarrollo de Taylor? Entonces, resultaba natural asumir hipótesis similares para los desarrollos trigonométricos, pues los datos de los que se disponía hasta la fecha siempre habían indicado que las funciones que se podían descomponer como una serie infinita eran analíticas. Si Fourier tenía razón y sus desarrollos eran aplicables a funciones generales, incluso a funciones discontinuas, su descubrimiento suponía una enorme ventaja sobre los desarrollos en series de potencias, que eran los únicos que se habían estandarizado. Lo que probablemente no pensaron los matemáticos de la época es que los coeficientes que aparecen en el desarrollo de Taylor de una función tienen un carácter extremadamente local —solo dependen del comportamiento de la función y sus derivadas en un entorno muy reducido de un punto— y, sin embargo, todos los coeficientes obtenidos para el desarrollo en serie de Fourier de cualquier función dependen del comportamiento de esta en todo su dominio. Es esta propiedad la que permite relajar las exigencias sobre la clase de funciones a las que dichos desarrollos se pueden aplicar. Pero llegar a esta conclusión costó mucho tiempo. Por otra parte, Fourier desconocía la memoria de Euler de 1777, lo cual explica que empleara un método muy distinto y menos riguroso para deducir los coeficientes del desarrollo.

A pesar de que Fourier no logró demostrar la convergencia de sus series, excepto en algunos casos concretos como el de las constantes, y otros ejemplos para los que realizó los cálculos explícitamente, sus argumentos tuvieron el gran mérito de indicar el camino para futuras y fructíferas investigaciones, en varias áreas de las matemáticas. Se planteó el estudio profundo de la convergencia de estas y otras muchas series, lo cual dio lugar, por ejemplo, a la distinción entre distintos tipos de convergencia (puntual, absoluta, uniforme, en norma energía, etc.) e incluso a diferentes métodos de sumación de series; y, como efecto colateral, a una revisión de los fundamentos mismos del análisis —Fourier insiste reiteradas veces en la memoria sobre el aspecto de que sus series se suman «término a término» pero existen otros muchos posibles

métodos de sumación—. Los inusuales cálculos que acabamos de presentar, que carecían del rigor necesario incluso para los estándares de la época, sirvieron, sin embargo, para motivar el estudio de problemas novedosos como la solución de sistemas lineales que involucran matrices infinitas, tema que se trata hoy con herramientas del análisis funcional. Además, Fourier introdujo e hizo uso sistemático del método de separación de variables en esta memoria y precisó numerosos aspectos básicos para la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. En particular, además del caso de la lámina semi-infinita, la memoria contenía investigaciones para otras geometrías, incluyendo la barra delgada calentada desde sus extremos, el anillo circular calentado en varios puntos distintos —ambos casos los consideró unidimensionales—, el prisma rectangular, el cilindro y la esfera. En estas últimas geometrías, además, explotó las simetrías subyacentes para, mediante el uso de coordenadas cilíndricas o esféricas, reescribir las ecuaciones.

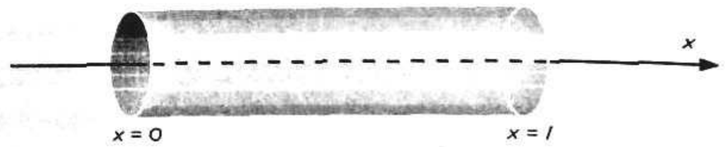
En su manuscrito logró resumir el trabajo de varios años. Además, sabía que con esta aportación había inaugurado un nuevo campo de la física y había estandarizado el método de separación de variables, así como la inclusión de condiciones de contorno apropiadas para cada tipo de problema, como instrumentos básicos para el estudio de las ecuaciones de la física matemática. Por todo ello, debió de encontrar alivio y felicidad cuando lo entregó a Delambre, secretario de la Academia. Por fin su nombre sonaría en los círculos matemáticos de París como un nombre importante, el de alguien a quien había que respetar.

UNA LARGA Y ACALORADA POLÉMICA

La primera reacción que hubo a la memoria fue un breve informe de Poisson, ni entusiasta ni ofensivo, que se limitaba a resumir su contenido, sin expresar crítica ni opinión alguna, y que se publicó en el número de marzo de 1808 del *Bulletin de la Société Philomathique*. Por su parte, Fourier esperaba con ansiedad la respuesta de la comisión, pero esta no llegaba y, con el paso del tiempo,

DISTRIBUCIÓN DEL CALOR EN UNA VARILLA DELGADA

Dada una barra metálica delgada, hecha de un material homogéneo y con superficie lateral aislante, de la que conocemos su distribución de temperaturas en el instante t=0 y cuyos extremos se mantienen permanentemente a temperatura cero, ¿cómo se distribuyen las temperaturas en la barra con el transcurso del tiempo? Este es uno de los problemas unidimensionales considerados por Fourier en la memoria de 1807 (el otro caso es el anillo circular, que estudió tanto con superficie lateral aislante como con intercambio de calor con el exterior).



BARRA METÁLICA HOMOGÉNEA. SE SUPONE QUE LA TEMPERATURA ES CONSTANTE EN CADA SECCIÓN VERTICAL

La ecuación del calor viene dada, en este caso, por $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Si aplicamos el método de separación de variables con $u(x,t) = X(x)T(t)$ obtenemos que

$$\begin{cases} X''(x) - \frac{\lambda}{c^2} X(x) &= 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) &= 0 \end{cases}$$

para cierta constante λ. La solución general de $T'(t) - \lambda T(t) = 0$ es $T(t) = Ce^{\lambda t}$. Como el calor se disipa con el transcurso del tiempo, debemos concluir que $\lambda < 0$ y, por tanto, $X(x) = A\cos\sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}}x + B\sin\sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}}x$.

Al imponer las condiciones de frontera $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, obtenemos que $X(0) = X(\pi) = 0$ y $X(x) = B\sin(kx)$ para cierto número natural k. Se sigue que $u(x,t) = be^{\frac{-k^2}{c^2}t}\sin(kx)$ para cierta constante b. Aplicando ahora el principio de superposición concluimos que la solución general de la ecuación del calor es, en este caso, una función del tipo

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\frac{-k^2}{c^2}t}\sin(kx).$$

Las series de Fourier aparecen ahora de forma natural al sustituir t=0 en la expresión:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

En particular, cuando afirmamos que toda solución del problema se debe expresar como superposición de las soluciones especiales que tienen las variables separadas estamos imponiendo que toda función $f(x)$ definida en $[0,\pi]$ y satisfaciendo $f(0) = f(\pi) = 0$ admite una representación como serie de senos ponderados. De hecho, ambas cosas son en gran medida equivalentes.

se impacientaba. Pronto descubriría que la comisión se estaba enfrentando a serias dudas sobre la validez de sus resultados, al menos en lo que respectaba al rigor.

Aunque la comisión no se manifestó por escrito, o no se conservan documentos que lo confirmen, sí disponemos de algunas cartas con las que Fourier se defendió. Al parecer, Lagrange no veía clara la deducción de los desarrollos en series trigonométricas y, en particular, del desarrollo en senos de la función $f(x) = x/2$ que Fourier había incluido en la memoria. Además, también criticaba la ausencia de una mención explícita al trabajo de Euler de 1777. Fourier replicó que no había citado a Euler porque solo tuvo conocimiento de esta contribución con posterioridad al envío de la memoria, y que había sido Lacroix quien le mostró el trabajo, pero que de todas formas los resultados presentados por él tenían mayor importancia y generalidad, a lo que añadía en tono laudatorio: «Si tuviera que mencionar algunos trabajos, estos habrían sido los de usted, pues los he leído cuidadosamente en el pasado y contienen multitud de elementos similares a los que he utilizado yo mismo». Lo que Fourier ignoraba es que Lagrange, a quien tanto admiraba y defendía, estaba molesto por unos comentarios que había incluido en la memoria, relativos al problema de la cuerda vibrante. En efecto: tras realizar los cálculos para la lámina semi-infinita, Fourier incluyó una

sección dedicada a relacionar sus series trigonométricas con las obtenidas por Bernoulli en sus estudios sobre dicho problema. El objetivo de la sección era mostrar que sus desarrollos en serie permitían la representación de funciones arbitrarias y, en consecuencia, justificar la propuesta de Bernoulli frente a las críticas que había recibido por parte de D'Alembert y de Euler. Por ejemplo, aclaraba una cuestión propuesta por Euler, quien era de la opinión de que si una función se anula en un intervalo abierto pero es diferente de cero en otras partes, entonces esta no es representable como serie trigonométrica, cosa que quedaba desmentida con toda claridad en su memoria. Lagrange había contribuido al problema de la cuerda vibrante con un importante artículo en 1759, que Fourier conocía, posicionándose a favor de Euler. No era partidario de mezclar, como había hecho Bernoulli, las matemáticas con argumentos físicos y, por tanto, también miraba con recelo el trabajo de Fourier. Por su parte, Fourier pensaba que, dado que sus resultados arrojaban luz a las cuestiones planteadas por todos estos matemáticos, Lagrange los aceptaría, reconociendo su verdadero valor. Pero Lagrange estaba ya al final de su carrera académica, y su edad y su trayectoria intelectual le restaron la flexibilidad de pensamiento que requería esta situación. Este episodio queda perfectamente descrito por el historiador matemático Ivor Grattan-Guinness (1941-2014), quien, en 1972, publicó, por primera vez, y en Estados Unidos, la memoria de Fourier de 1807, acompañada de un estudio crítico. En él se puede leer:

> La carrera intelectual de Lagrange no es, en general, una historia de profundos cambios de enfoque sino, por el contrario, la del desarrollo de nuevos resultados en el marco de unos principios inamovibles: el principio del trabajo virtual en la mecánica, los desarrollos de Taylor en el análisis y las soluciones funcionales para las ecuaciones en derivadas parciales. Así pues, el atardecer de su vida no era precisamente un momento apropiado para dar la bienvenida a nuevos principios.

Laplace argumentó que, como los senos son funciones impares, el desarrollo en serie de senos debe estar asociado a una función impar, a lo que Fourier respondió que dicha dificultad desaparece si la identidad se restringe al dominio adecuado. Además, observaba que todas las series que él había calculado son convergentes. Por otra parte, Laplace tampoco estaba de acuerdo con la derivación de la ecuación del calor, aunque solo había leído una primera propuesta de Fourier, fechada en 1806, que aún adolecía de fallos y que este había enviado tanto a Laplace como a Biot. Es más, en un trabajo posterior derivaría nuevamente esta ecuación a partir de principios físicos e incluiría el siguiente comentario: «Debo observar que el Sr. Fourier ya ha obtenido estas ecuaciones, cuyo auténtico fundamento, me parece, es el que acabo de presentar».

La respuesta de la Academia a la memoria de Fourier llegó en 1810, cuando decidieron proponer como tema para el Gran Premio de 1811 el estudio de la propagación del calor en sólidos conductores. De un modo bastante directo estaban reconociendo ante Fourier que consideraban que sus contribuciones eran importantes, pero requerían una profunda revisión y le daban la oportunidad de volver a presentar sus ideas en una nueva versión revisada y ampliada de la memoria, aunque no daban una respuesta concreta, específica, sobre la posible publicación del manuscrito. Se desconoce quién movió los hilos en la Academia para conseguir que esta eligiera para el Gran Premio este tema concreto. Al parecer, Fourier había sugerido esta solución en una de sus cartas y, aunque contó con la oposición de Laplace, el premio se convocó y Fourier presentó una nueva memoria. Entonces se nombró una nueva comisión, formada esta vez por Lagrange, Laplace, Malus, Haüy y Legendre, que debía valorar los trabajos presentados.

La memoria sometida por Fourier era una ampliación de la de 1807 en la que se podían encontrar todos los resultados y técnicas de la primera y en la que, además, se añadían dos nuevas secciones: una sobre el enfriamiento en sólidos infinitos y otra sobre el calor terrestre y radiante. Evidentemente, el desacuerdo provocado por la memoria anterior no se resolvía en esta nueva memoria, por lo que la comisión no quedó satisfecha, al no haberse aclarado definitivamente las dudas que aún existían sobre el rigor y el alcance de la teoría presentada por Fourier. Sin embargo, decidieron concederle el Gran Premio de 1811. En su informe, expresaban tanto su ad-

miración por la profundidad de las ideas contenidas en la memoria como sus dudas sobre los aspectos que aún requerían aclaración:

> Esta teoría contiene las verdaderas ecuaciones diferenciales que rigen la transmisión del calor en el interior y en la superficie de los cuerpos, y la novedad de este tema, combinada con su importancia, han determinado a la Clase a premiar este trabajo, observando, sin embargo, que la forma en la que el autor llega a estas ecuaciones no está exenta de dificultades y que su análisis para integrarlas es aún deficiente en lo que se refiere a la generalidad y el rigor.

Para Fourier, la lectura de este informe tuvo que ser agridulce. Por un lado, se le concedía el premio, lo que suponía un reconocimiento de gran calado a su obra. Pero, en palabras del historiador británico John Herivel (1918-2011), «lo que la comisión le entregaba con una mano, se lo quitaba con la otra», al insistir en que aún quedaban dificultades técnicas por resolver. Esto, evidentemente, les permitía negarse a publicar el trabajo tal como estaba. Fourier se sintió profundamente contrariado. Escribió una carta de protesta, pero Delambre respondió que la comisión tenía poderes plenos para tomar sus decisiones.

«Usted es un ejemplo vivo de lo que me dijo hace algún tiempo, que las pretensiones están siempre en razón inversa al mérito.»

— Carta de D'Alembert a Lagrange.

Excepto por la concesión de este premio, no han quedado —o no existen, porque nunca fueron redactados— documentos que reflejen las críticas de la comisión a esta segunda memoria. Probablemente Lagrange y Laplace se reunieron con Fourier durante una visita que este realizó a París mientras trabajaba en el prólogo de la *Descripción de Egipto*, y le presentaron sus observaciones de viva voz. Por su parte, Fourier remitió sus respuestas a ambos en forma de carta. Con Laplace, a quien en secreto hacía responsable de las críticas, se mostró muy áspero. Sin embargo, con Lagrange el tono era mucho más suave, a pesar de lo cual este se mantuvo firme en sus críticas a la convergencia de las series trigonométricas. Nunca aceptó, por su escaso rigor, los resultados que tan insistentemente defendía Fourier.

Con respecto a los aspectos físicos de la investigación de Fourier, las críticas procedían de Laplace y su entorno. Fueron sus alumnos Poisson y Biot los que, aun sin formar parte de las comisiones que juzgaban estos trabajos, manifestaron por escrito las críticas. Como sabemos, Poisson inició esta «campaña» al presentar un resumen especialmente plano de la memoria de 1807. Biot fue, sin embargo, mucho más agresivo. Es muy probable que sus críticas hubieran sido mucho más suaves si Fourier hubiera tenido la delicadeza de citar su artículo de 1804 en el que, como ya se ha comentado, había esbozado algunos resultados sobre el comportamiento cualitativo de la conducción del calor para el caso de una barra metálica y delgada que es calentada desde uno de sus extremos. Tras leer este trabajo, Fourier había redactado (entre 1804 y 1805) varios bocetos que conformarían la base para sus memorias de 1807 y 1811. Entonces dedujo de forma equivocada la ecuación de difusión y, al parecer, envió alguno de estos manuscritos a Biot, aunque es probable que le enviara una versión preliminar de la memoria de 1807, en la que esta deducción aún contenía errores. Con esta excusa, Biot publicó posteriormente un artículo en un periódico en el que afirmaba: «Existe una dificultad de tipo analítico que no ha sido superada hasta el momento por ninguno de los que han intentado someter a cálculos la propagación del calor en cuerpos sólidos».

Se trataba, obviamente, de una crítica directa a Fourier. Sugería que su derivación de la ecuación del calor era incompleta. El monumental enfado de Fourier tras leer este artículo en prensa, así como su convicción íntima de que Biot obraba alentado por Laplace, queda demostrado en una de sus cartas, en la que, tras explicar que Biot había cometido, en sus investigaciones sobre la propagación del calor, un error que él consideraba extremadamente grave, se quejaba del trato recibido, pues le indignaba que sus críticas hubieran aparecido en un diario público:

> Este autor, quien, ayudado y aconsejado por el señor Laplace, ha intentado utilizar la ecuación del movimiento lineal del calor, cree que ha demostrado el siguiente resultado: que una barra de hierro

cuyo extremo se introduce en un horno a una temperatura dada no puede ser calentada de manera sensible a una distancia de seis pies de dicho extremo. Él no tiene en cuenta que la distancia a la que el calor puede propagarse en una barra depende de su espesor, y podría haber deducido esto con facilidad si hubiera establecido de forma rigurosa la ecuación en cuestión. [...] Tratar con semejante descuido uno de los problemas más importantes de la física analítica, apresurarse a publicar en artículos de prensa especulaciones que son aún inciertas, e incluso erróneas, fundar su reputación mediante el intercambio mutuo de ridículos elogios, hacer uso de la prensa para imponer sobre unos, e incluso atribuir a terceros, sus propios errores, y predisponer a otros contra un trabajo que pone especial cuidado en no atacar directamente, e intentar, mediante un halago servil y calculado, mostrar como el inventor de una idea a una persona que no lo es en absoluto: estas son, señor, cosas que no puedo observar sin sentir un profundo desprecio por quien las hace.

Además, en la misma carta, Fourier afirmaba su predisposición a abandonar su defensa de la memoria de 1807 porque «preferiría perder una causa justa que defenderla a través de la prensa»; asimismo anunciaba su intención de «abandonar este noble escenario» y dejarlo para que lo usaran «aquellos que desean desarrollar una carrera igualmente noble».

Fourier se había sentido atacado por Biot; por eso reaccionó con tanto vigor contra él. Pero fueron las críticas de Poisson, que estaban mejor fundadas, las que forzaron una defensa meditada, racional. Las quejas de Biot se centraban en que Fourier no había mencionado su trabajo e intentaba disputarle la prioridad de algunas ideas, pero Fourier tenía argumentos que justificaban la originalidad de sus contribuciones y, por tanto, no veía peligrar en ningún sentido este tipo de reconocimiento. Sin embargo, Poisson defendía que existían importantes lagunas en los métodos empleados por Fourier y, además, afirmaba que él había encontrado una nueva forma de abordar los problemas de la teoría analítica del calor que era, ciertamente, la correcta.

Fourier tuvo que emplearse a fondo para bloquear las críticas de Poisson. Lo primero que hizo fue garantizarse la prioridad de sus

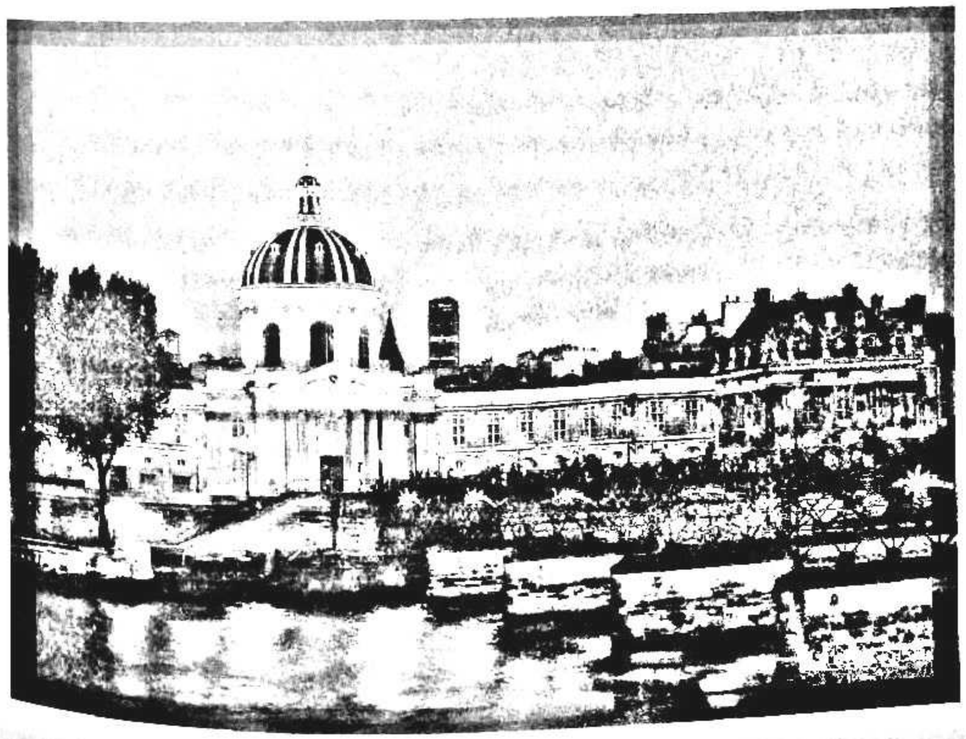


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Retrato del físico, astrónomo y matemático francés Jean-Baptiste Biot (1774-1862).

FOTO SUPERIOR DERECHA:
El físico y matemático Siméon Denis Poisson (1781-1840) se mostró crítico con la memoria de la propagación del calor de Fourier.

FOTO INFERIOR:
Vista nocturna del Instituto de Francia en París, lugar donde la Academia de Ciencias de Francia tiene su sede.

resultados, que aún no habían sido publicados por la Academia, para lo cual publicó en 1816 varios artículos descriptivos que resumían el contenido de su memoria de 1811. A continuación, redactó un artículo titulado «Precisiones históricas», que contenía algunos argumentos devastadores contra Biot y Poisson, en el que contestaba punto por punto todas las críticas de Poisson. Nunca publicó este manuscrito, pero sí lo puso en circulación entre aquellos que estaban interesados en la conducción del calor. Finalmente, entre las aplicaciones sugeridas por Poisson, localizó un ejemplo para el que demostró que los métodos empleados por su oponente no eran los apropiados. Con esto, esperaba minar su credibilidad. Por supuesto, envió todos estos comentarios, así como sus «Precisiones históricas», a Laplace, acompañados de una carta en la que argumentaba: «No me permitiría estas críticas si no estuviesen dirigidas al Sr. Poisson y si no las hubiera enviado al Sr. Laplace, quien será un juez benévolo, igualmente inclinado a favor de ambos contrincantes y sabedor de que esta gran controversia es seria y no publicitarla solo conllevará ventajas», con lo que aspiraba a ganar la imparcialidad de Laplace. A continuación, atacaba duramente a sus críticos:

> Hace siete u ocho años, los señores Biot y Poisson se expresaron de forma similar con respecto a mi trabajo. Tras haber contestado, ahora ellos reconocen la exactitud de mis resultados, pero reclaman que han encontrado otro método para exponerlos, y que este método es excelente y el verdadero. Si ellos hubieran iluminado esta rama de la física aportando una visión importante y general, y si hubieran perfeccionado el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales subyacentes, si hubieran establecido un elemento fundamental en la teoría del calor mediante experimentos precisos como el del calorímetro, entonces tendrían derecho a juzgar mi trabajo e incluso a corregirlo. Les enviaría mis aportaciones con sumo gusto y reconocería que su discusión del mismo es una preciosa fuente de inspiración. Pero no se extienden las fronteras de la ciencia presentando de una forma que afirma ser diferente los resultados que uno mismo no ha encontrado y, sobre todo, esto no se logra impidiendo que el verdadero autor los publique.

Por otra parte, Fourier sentía un profundo respeto por Poisson, el científico, quien había sido su alumno en la Politécnica, lo cual queda reflejado en las siguientes líneas, que incluyó en la misma carta a Laplace: «El señor Poisson tiene demasiado talento para ejercitarlo en el trabajo de otros, y lo derrocha al intentar deducir por sí mismo lo que ya es conocido. La ciencia está esperando, y obtendrá de él, descubrimientos de un orden muy superior».

LAS MATEMÁTICAS AL SERVICIO DE LA FÍSICA

Además de los matemáticos que estaban implicados directamente en la teoría analítica del calor, de los que ya se ha hablado, hubo algunas contribuciones puntuales al debate realizadas por gente foránea. Quizás es destacable, en este sentido, la aportación de Carl Gustav Jakov Jacobi (1804-1851), quien, tras leer uno de los informes de Poisson, escribió:

> El Sr. Poisson no debería haber reproducido en su informe una frase poco acertada del Sr. Fourier en la que este último nos reprocha a Abel y a mí el no habernos ocupado preferentemente del movimiento del calor. Es cierto que el Sr. Fourier opinaba que el fin principal de las matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber comprendido que el fin único de la ciencia es el honor del espíritu humano y que por esa razón una cuestión de números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo.

Jean Dieudonné.

Estas palabras fueron utilizadas como lema para la refundación de la matemática francesa en el siglo XX por los seguidores del grupo Bourbaki, especialmente Jean Dieudonné (1906-1992), que publicó una defensa de las ideas de este grupo bajo el título *La elección bourbakista* y un libro de divulgación sobre la esencia de las matemáticas que lleva por título *En honor del espíritu humano. Las matemáticas, hoy*. Otra defensa histórica de «la matemática por la matemática» es el famoso librito de Godfrey Harold Hardy (1877-1947) *Apología de un matemático*, en el que el autor presumía de que ninguno de sus teoremas lograría jamás ser útil en la práctica. Detestaba la matemática aplicada porque, según él, permite usos dañinos, pero se equivocaba: con los años, algunos resultados de teoría de números que él consideraba «perfectamente inútiles» han resultado imprescindibles para el avance de, por ejemplo, la criptografía.

Aun así, su desconfianza hacia Poisson, el hombre, le llevaría a forzar, cuando tuvo ocasión de hacerlo, su salida del equipo editorial del *Bulletin de la Société Philomathique*.

CAPÍTULO 3

La teoría analítica del calor

Resentido con la Academia, Fourier decidió publicar sus investigaciones por sí mismo en un volumen que tituló *Teoría analítica del calor*. Esta obra está considerada hoy como uno de los documentos fundacionales de la física teórica. Su impacto sobre las matemáticas, la física y las distintas ingenierías está fuera de duda. Con toda probabilidad, la ciencia y la tecnología modernas no habrían sido posibles sin el desarrollo correcto de estas ideas.

En la Academia no había especial prisa por publicar la memoria de Fourier de 1811. Por ello, en 1815, cuando ya vivía en París, Fourier presionó con insistencia a Delambre, hasta que este aceptó la inclusión de su manuscrito en la lista de trabajos admitidos para su publicación en las *Mémoires de l'Académie (Memorias de la Academia)*. Sin embargo, esta decisión no conllevaba la aparición inmediata, sino solo un compromiso formal de que el artículo se publicaría en el futuro. En efecto, la memoria acabó publicándose, pero dividida en dos partes que vieron la luz en 1824 y 1826, respectivamente, es decir, trece y quince años después del envío del trabajo y nueve y once años después de que este se aceptara.

La matemática francesa de principios del siglo XIX estaba, en cierto modo, dirigida por Lagrange, Laplace, Legendre y Monge, y ellos habían elegido como sucesor, de entre los matemáticos más jóvenes, a Poisson. Para motivarlo e impulsarlo, dejaron que asumiera algunas responsabilidades, entre las que destacaba la posición de editor del *Bulletin de la Société Philomathique*. Poisson tuvo por tanto acceso a los trabajos aún no publicados que se enviaban a la Academia y recibió, en numerosas ocasiones, el encargo de publicar los correspondientes informes de recensión. Como se asumía que los artículos tardarían en publicarse, la aparición de estos informes era de vital importancia para los autores. Sin embargo, algunas de las recensiones publicadas por Poisson

fueron excesivamente planas y, ocasionalmente, negativas, como fue el caso del informe que elaboró sobre la memoria de Fourier de 1807. Una vez publicados estos informes, Poisson redactó varios artículos que, sin lugar a dudas, se apoyaban o inspiraban precisamente en los trabajos que previamente había criticado. Los dos matemáticos más destacados a los que perjudicó con este comportamiento fueron Fourier y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), aunque hubo otros. No debemos interpretar, por tanto, que el retraso en la publicación de las memorias de Fourier estuviera motivado por algún tipo de animadversión hacia él. De hecho, se correspondía con la tónica general, según la cual una vez se aceptaba la publicación de un manuscrito, si este resultaba especialmente innovador o relevante, era usual que su publicación definitiva se postergara durante años, quedando de forma exclusiva en manos de los académicos, lejos del alcance del público general. Esto, como es obvio, redundaba en beneficio de los miembros establecidos de la Academia, en la medida en que les permitía usar a placer las ideas contenidas en estos trabajos para enriquecer y publicar sus propias investigaciones, y eso es lo que hizo Poisson.

Cauchy había sometido a publicación en 1814 un artículo revolucionario dedicado al cálculo de integrales de funciones reales de una variable real por la vía de lo que hoy se conoce como «teorema del residuo», que requiere el paso al plano complejo. Este trabajo era novedoso y profundo y, como en el caso de las contribuciones de Fourier a la teoría analítica del calor, encontró una fuerte oposición en la Academia. En este caso las críticas provenían del entorno de Legendre, aunque fue nuevamente Poisson quien redactó un informe negativo que le beneficiaba personalmente. El paralelismo entre los casos de Cauchy y Fourier crece ante la observación de que también Cauchy fue galardonado con uno de los premios de la Academia por otra contribución, y que el correspondiente artículo quedó después retenido en manos de Delambre.

Curiosamente, Cauchy también entró de forma momentánea en conflicto de intereses con Fourier, pues en el artículo que le habían premiado y en otro posterior, de 1817, había incluido una

versión del teorema integral de Fourier, quien inmediatamente reclamó la prioridad en el descubrimiento de estos resultados, enfatizando que Cauchy había ingresado como miembro de la Academia en 1816 y, por tanto, había tenido acceso a las memorias de Fourier de 1807 y 1811. Pero Cauchy no quiso polemizar y reconoció inmediatamente que estos resultados habían sido obtenidos por Fourier con anterioridad.

LA GESTACIÓN DE LA *TEORÍA ANALÍTICA DEL CALOR*

En 1821 Fourier no quiso esperar más, por lo que decidió publicar sus investigaciones por sí mismo en un volumen que tituló *Teoría analítica del calor*. Solo un año después, en 1822, al suceder a Delambre como secretario perpetuo de la Academia, pudo desbloquear la parálisis en la que habían quedado estancados sus trabajos y publicar, sin cambios adicionales, el mismo texto en las *Mémoires de l'Académie*. En el prólogo explicaba las idas y venidas de su obra, y añadía: «Los retrasos en la publicación de mi obra habrán contribuido a hacer el trabajo más claro y más completo». Fourier no quiso ahondar en la polémica, criticando a quienes le habían hecho sufrir tan larga espera, en un combate intelectual en el que él siempre había jugado en desventaja. Simplemente se limitó a publicar lo que él consideraba su obra maestra, quizá con la esperanza de que, al ver definitivamente la luz, la historia le reconocería el lugar de privilegio que debía ocupar en el mundo matemático.

Y así fue. Por eso se escribe hoy sobre Fourier, porque sus ideas tuvieron un impacto duradero. De hecho, la *Teoría analítica del calor* es una de las obras maestras de la ciencia y la tecnología. Su valor va más allá del hecho de que sea uno de los documentos fundacionales de la física teórica, así como de la parte de las matemáticas que hoy denominamos «análisis de Fourier», cuyas ramificaciones invaden, ya desde sus inicios, pero cada vez más vigorosamente, numerosos aspectos de las matemáticas, la física, la ingeniería y, finalmente, nuestra vida coti-

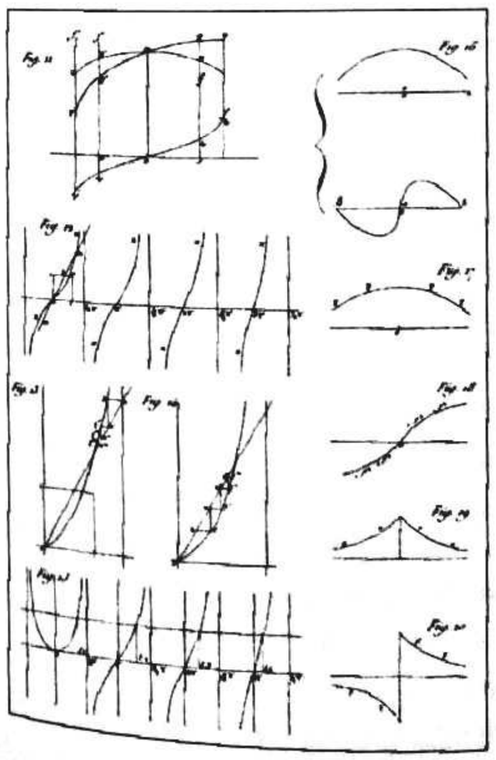
diana. Un símil comparable y, de hecho, uno de los aliados fundamentales de esta teoría matemática se puede encontrar en la formulación, por parte del matemático británico James Clerk Maxwell (1831-1879), de las ecuaciones del campo electromagnético, cuyo impacto sobre nuestras vidas no puede infravalorarse. Las ondas lo dominan todo y, como sabemos, son la expresión física del análisis de Fourier.

El libro consta de un prólogo, o discurso preliminar —que es como Fourier lo titula—, y nueve capítulos, cuyo contenido proporciona una clara evidencia del interés del autor por las aplicaciones.

En el discurso preliminar se explica el largo proceso que llevó a la cristalización definitiva de la monografía. Además, y lo que es quizá más importante, se incluye una apasionada defensa de la matemática como herramienta fundamental para la investigación de los fenómenos naturales y se resalta la importancia de los estudios sobre la distribución del calor en sólidos conductores, tanto para la física como para la ingeniería y la geología. Este documento se considera una de las joyas de la literatura científica universal, por lo que no hemos podido sustraernos a la tentación de traducir algunos de sus párrafos. Las primeras frases suponen una nítida declaración de intenciones:

> Las causas primeras nos son desconocidas, pero están sujetas a leyes sencillas y constantes que pueden ser descubiertas mediante la observación, y cuyo estudio es el objeto de la filosofía natural.
>
> El calor, como la gravedad, penetra todas las sustancias del universo, sus rayos ocupan todas las partes del espacio. El objeto de nuestro trabajo es exponer las leyes matemáticas a las que obedece este elemento. Esta teoría del calor será, a partir de ahora, una de las ramas más importantes de la física general.

A esto, Joseph Fourier añade algunos comentarios de tipo histórico que sitúan su investigación claramente separada de la mecánica racional de Newton, lo cual revela que Fourier era consciente de la relevancia de su aportación, pues suponía salirse, por primera vez en un largo período de tiempo, de la línea



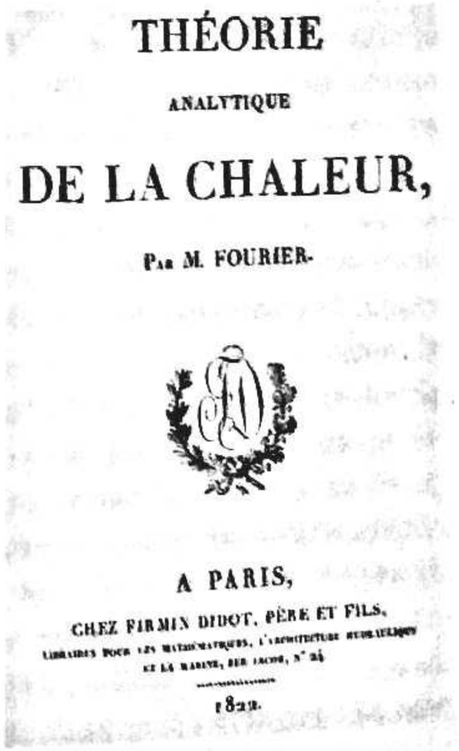


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA: **Augustin-Louis Cauchy, representado por Zéphirin Belliard en 1840.**

FOTO SUPERIOR DERECHA: **Retrato del astrónomo Jean-Baptiste Joseph Delambre, obra de Louis-Léopold Boilly.**

FOTOS INFERIORES: **Página interior y portada de la primera edición de la *Teoría analítica del calor*, de Joseph Fourier, publicada en 1822.**

oficial de pensamiento, impuesta por los numerosísimos y muy poderosos seguidores de Newton:

> [...] cualquiera que sea el alcance de las teorías mecánicas, estas no se aplican a los efectos del calor. Estos constituyen un orden especial de fenómenos que no pueden ser explicados por los principios del movimiento y el equilibrio. Poseemos desde hace tiempo ingeniosos instrumentos adaptados a medir varios de estos efectos, se han recopilado valiosas observaciones, pero de este modo solo se han obtenido resultados parciales y en ningún caso la demostración matemática de las leyes que incluyen a todos estos fenómenos.

A continuación, Fourier explica cómo ha llegado por sí mismo a deducir las leyes que rigen el fenómeno de la conducción del calor, basándose en unos pocos principios físicos elementales, y en la observación: «He deducido estas leyes del estudio prolongado y la atenta comparación de los hechos conocidos hasta ahora. Los he observado todos de nuevo, en el curso de varios años, con los instrumentos más precisos de los que se han hecho uso hasta ahora.»

En su discurso preliminar, Fourier pone en contexto sus aportaciones y expone los principios filosóficos básicos por los cuales ha dirigido su investigación. Para él, la matemática, especialmente el análisis matemático, es la herramienta más apropiada que existe para el estudio de los fenómenos naturales. Además, no solo es importante conocer las ecuaciones por las que se rige una ley física, sino que es imprescindible ser capaz de encontrar las soluciones a dichas ecuaciones, hasta el punto de lograr una determinación numérica precisa a cada problema que se plantee. Para ello introduce su método de separación de variables, así como las condiciones de contorno precisas que determinan la unicidad de la solución en cada caso práctico. Por otra parte, también explica que los métodos que él ha empleado para estudiar la conducción del calor servirán para el estudio de otros problemas físicos y que, en su opinión, la única fuente de la que hay que beber para avanzar en matemáticas por el buen camino es el estudio de la naturaleza.

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA *TEORÍA ANALÍTICA DEL CALOR*

En el primer capítulo de su libro, Fourier introduce los aspectos físicos del fenómeno de la conducción del calor e incluye la descripción de diversas situaciones en las que se requiere un estudio pormenorizado del problema. Defiende, además, que las matemáticas facilitan la investigación de este fenómeno físico. Concretamente, considera muy importante el cálculo de soluciones exactas, que se puedan concretar de forma numérica.

> «Es imposible comunicar honestamente la belleza de las leyes de la naturaleza, de manera que la gente pueda realmente sentirla, si la gente no posee un conocimiento profundo de las matemáticas.»
>
> — RICHARD FEYNMAN, FÍSICO TEÓRICO ESTADOUNIDENSE.

A continuación, en el segundo capítulo, se deducen, según los principios físicos que gobiernan el fenómeno, las ecuaciones diferenciales que modelan la conducción del calor. Concretamente, deduce la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

para la conducción del calor en el interior del sólido y, como un corolario evidente, la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

para el problema estacionario.

Con frecuencia, al enfrentarnos a un problema concreto como, por ejemplo, la distribución estacionaria del calor en una esfera sólida o en un cilindro, se pueden utilizar las simetrías que aparecen de forma natural, para transformar la ecuación del calor asociada en otra ecuación diferencial que está mejor adaptada a la geometría y a la física del

COORDENADAS CARTESIANAS, POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

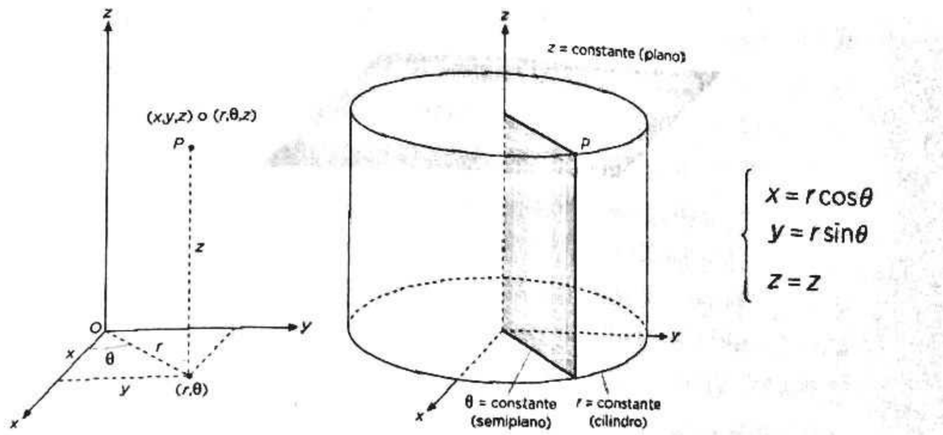
Cuando se quiere describir una parte del espacio, pueden usarse diversos sistemas de coordenadas. El primero que se comentará fue introducido por Descartes para representar el espacio al completo. Es el que se usa constantemente para definir y estudiar las funciones de varias variables. Se colocan los ejes de coordenadas de modo que son perpendiculares dos a dos y cada punto del espacio queda descrito de forma unívoca a partir de los valores de sus proyecciones perpendiculares a los distintos ejes. Así, por ejemplo, un punto del plano tiene dos coordenadas cartesianas $P=(x,y)$. Ese mismo punto puede describirse también en coordenadas polares. Para ello, basta considerar su módulo

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

—es decir, la distancia del punto al origen de coordenadas— y el ángulo θ que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el eje de abscisas. Ambas coordenadas se relacionan mediante las ecuaciones

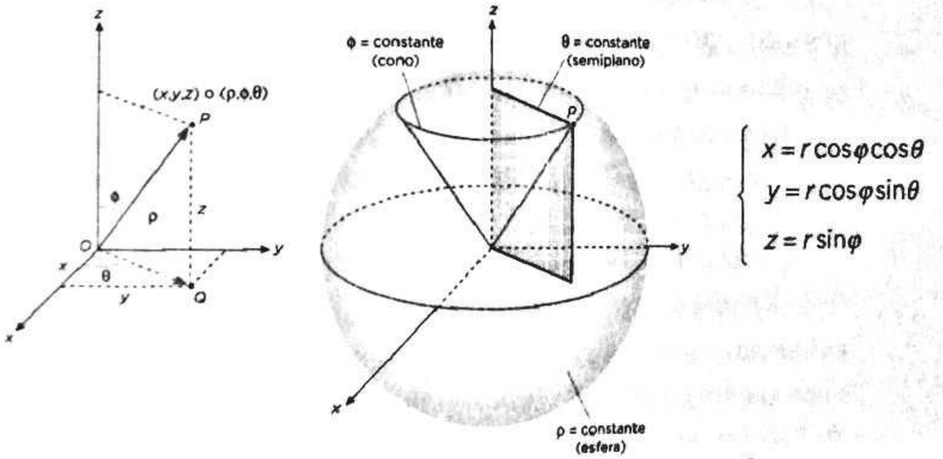
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},$$

que reciben el nombre de «cambio a polares». El uso de estas nuevas coordenadas puede facilitar los cálculos cuando se trabaja en ciertos dominios del plano, como por ejemplo un disco o una corona circular. Análogamente, en el espacio, puede ser de ayuda utilizar los cambios a coordenadas cilíndricas:



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

o a coordenadas esféricas.



$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\theta \\ y=r\cos\varphi\sin\theta \\ z=r\sin\varphi \end{cases}$$

problema. Esto se puede lograr mediante un cambio de variables, pero también considerando un elemento de volumen apropiado y deduciendo directamente las nuevas ecuaciones a partir de principios físicos. Fourier lo hace de ambas formas para los distintos casos cuya solución va a estudiar en detalle con posterioridad.

Supongamos que (x,y,z) representa un punto del espacio en coordenadas cartesianas y que la variable t denota el tiempo. Supongamos además que la función $u(x,y,z,t)$ resuelve una ecuación en derivadas parciales en cierto dominio del espacio-tiempo. Si se hace, en la parte espacial de la ecuación, un cambio de coordenadas —es decir, no se toca la variable t, que indica el paso del tiempo, pero cambiamos los valores x,y,z por las expresiones que aparecen en los miembros de la derecha del correspondiente cambio de coordenadas—, entonces nos encontraremos ante una nueva función v que se expresa en términos del tiempo y de las nuevas coordenadas que estamos considerando. Por ejemplo, en el cambio a esféricas, la nueva función v viene dada por

$$v(r,\theta,\varphi,t)=u(r\cos\varphi\cos\theta,r\cos\varphi\sin\theta,r\sin\varphi,t).$$

Tomando derivadas a ambos lados de la igualdad y considerando la ecuación que satisface la función u, se obtendrá una nue-

va ecuación diferencial en derivadas parciales para la función v. Esta nueva ecuación podría ser más complicada que la original, como efectivamente es el caso si consideramos para la ecuación del calor los cambios a coordenadas esféricas y cilíndricas. Sin embargo, si imponemos ciertas condiciones de simetría, que tienen sentido e interés físico, la ecuación resultante puede ser más sencilla que la original, al verse reducido el número de variables involucradas. Un ejemplo de esto lo vemos cuando Fourier, tras realizar el cambio a esféricas, restringe su estudio a las soluciones de la ecuación del calor que, en cada instante de tiempo, se mantienen constantes sobre las esferas concéntricas con centro en el origen de coordenadas. Es decir, estudia las soluciones cuyo valor solo depende del tiempo y del radio r. Para este tipo de soluciones, la ecuación queda reducida a

$$\frac{1}{K}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

En el tercer capítulo se resuelve el problema de la distribución estacionaria del calor en el sólido infinito acotado por los planos

$$y=\frac{\pi}{2} \text{ e } y=-\frac{\pi}{2}$$

y el semiespacio $x \geq 0$, cuando sus paredes se mantienen a temperatura constante. Concretamente, Fourier asume que la temperatura en x=0 vale un grado centígrado y las otras paredes se mantienen a cero grados. Si consideramos cualquiera de las secciones de este sólido que surgen de forzar la igualdad $z=c$ para alguna constante c, vemos que en dicha sección nos encontramos ante un problema completamente análogo al que Fourier había estudiado para la lámina semi-infinita en su memoria de 1811. De hecho, lo primero que hace aquí es reducir este problema al de la lámina y, a continuación, lo resuelve reproduciendo los cálculos que ya se han explicado en el segundo capítulo del presente libro. Es, por tanto, en este contexto, donde aparecen por primera vez en la *Teoría analítica del calor* tanto las series de Fourier como el método de separación de variables, que conduce a su consideración.

Fourier reproduce todos los argumentos que había introducido en sus memorias de 1807 y 1811, incluyendo el estudio de series de Fourier de funciones arbitrarias, la deducción —más que dudosa— de la expresión de los coeficientes de Fourier, y las alusiones al problema de la cuerda vibrante, siguiendo la estela de Daniel Bernoulli. Además, en este capítulo se demuestran varias propiedades básicas de las series de Fourier, incluyendo un resultado que relaciona convolución y producto, del que se hablará posteriormente debido a su utilidad en las aplicaciones.

Si se lee esta parte de la memoria y se tiene en cuenta que en ella se reproducen esencialmente los mismos argumentos que Fourier había utilizado en las memorias anteriores de 1807 y 1811, puede comprenderse por qué suscitaron tan agrias polémicas. Para empezar, Fourier afirma en repetidas ocasiones que sus cálculos se aplican a cualquier función $f(x)$, pero utiliza el desarrollo en serie de Taylor de esta función, lo cual impone su analiticidad. Por otra parte, su argumento de truncar el desarrollo de Taylor, resolver el sistema de ecuaciones correspondiente, etc., no parece aplicable ni siquiera en el caso de que nos restrinjamos a funciones analíticas. Además, la tesis de que el desarrollo en serie de Fourier es válido simplemente porque somos capaces de encontrar los coeficientes a_k, b_k a partir de la función $f(x)$ carece completamente de valor probatorio. Aun así, Fourier insiste en la generalidad de su método y, como muestra, lo aplica a varios casos no triviales como los desarrollos del seno en cosenos, del coseno en senos, de la función característica de un intervalo, de una función trapezoidal, etc., demostrando en cada caso —esta vez sí, con exquisito rigor— la convergencia puntual de la serie. Se sigue que, incluso para el estándar de rigor de la época, algunos de los resultados y fórmulas que se encuentran en esta parte de la memoria eran extremadamente dudosos. Debemos, de todos modos, reconocer a Fourier su enorme intuición y su tesón. Cuando, en 1995, describía esta parte de la *Teoría analítica del calor*, Jean-Pierre Kahane (n.1926), uno de los matemáticos actuales que más ha contribuido al desarrollo de las ideas de Fourier, afirmaba: «Una buena parte del análisis matemático de los siglos XIX y XX consistió precisamente en dar sentido a estos trozos de matemática sin sentido».

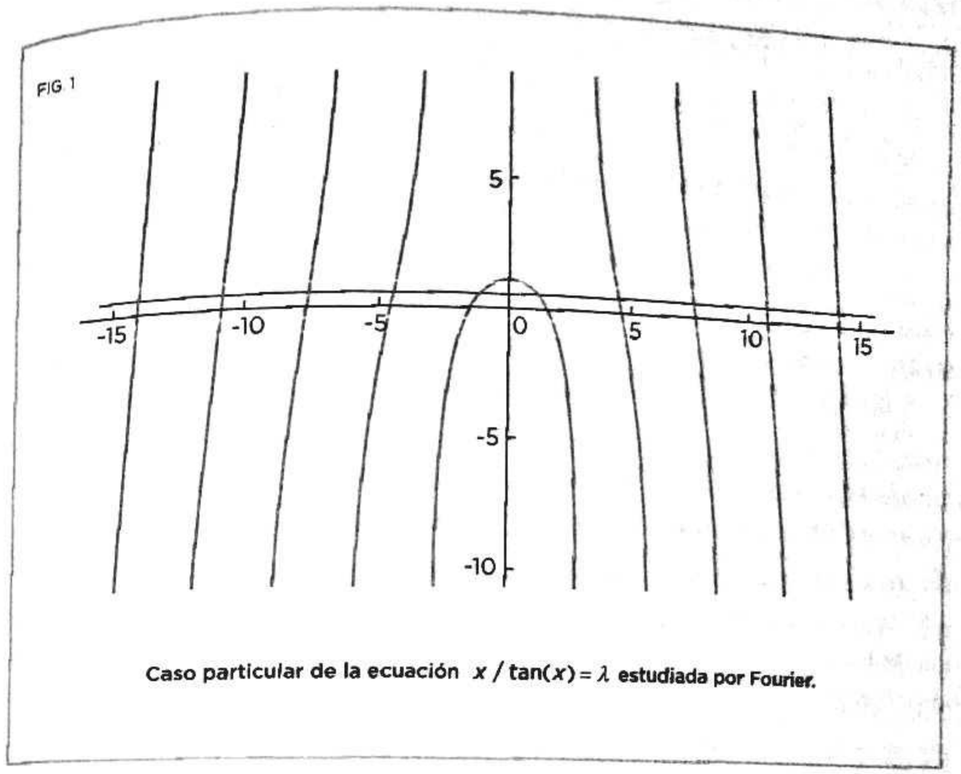
En el capítulo cuarto Fourier estudia la distribución del calor en un anillo sólido. El matemático francés asume, como en el caso de la varilla, que el anillo es muy delgado, de modo que en cada sección transversal la temperatura es constante. Esto provoca que solo intervengan dos variables en el problema: una, la variable espacial, para el ángulo, y la otra para el tiempo. De hecho, este problema es localmente indistinguible del caso de la varilla delgada, por lo que la ecuación a considerar es la misma. Lo único nuevo a tener en cuenta es que la solución debe ser, respecto de la variable espacial, periódica de período 2π. En estas condiciones, las soluciones estacionarias son de la forma $u_n(x,t)=a_n e^{-Kn^2t}\sin(nx)$ o bien $v_n(x,t)=a_n e^{-Kn^2t}\cos(nx)$, con $n=1,2,\ldots$ y, por tanto, la solución general depende del desarrollo en serie de senos y cosenos de la función $f(x)=u(x,0)$.

El capítulo quinto está dedicado a la distribución del calor en una esfera sólida. Fourier se centra esta vez en las soluciones que se obtienen a partir de condiciones iniciales radiales. Concretamente, asume que la temperatura inicial es constante sobre esferas concéntricas, lo cual fuerza a que la solución posea dicha simetría. Así, las únicas variables que intervienen en el problema son el radio y el tiempo. La ecuación a estudiar es, en este caso,

$$\frac{1}{K}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

con condición inicial $v(r,0)=f(r)$ para $0\le r\le R$, donde $R>0$ es el radio de la esfera. Además, Fourier impone una condición de contorno adicional para describir el comportamiento de la temperatura en el borde de la esfera, basándose en el fenómeno de convección.

Un aspecto especialmente importante en este estudio es que las series de Fourier que aparecen, una vez imponemos el método de separación de variables, ya no lo son en el sentido clásico, puesto que son series que no están armónicamente relacionadas. Los senos y los cosenos no se evalúan sobre múltiplos enteros de un mismo período común, $w=2\pi/T$, por lo que la función que resulta de su superposición ya no admite una extensión periódica.



Caso particular de la ecuación $x / \tan(x)=\lambda$ estudiada por Fourier.

Además, para determinar exactamente qué frecuencias intervienen en la solución, Fourier tuvo que enfrentarse al problema de resolver la ecuación no lineal $x / \tan(x)=\lambda$ para los distintos valores posibles de la constante λ. Es evidente que esta ecuación admite siempre un conjunto infinito de soluciones. Lo que no es tan sencillo es su determinación exacta. Fourier proporciona, para el cálculo preciso de las soluciones de esta ecuación, un método iterativo muy similar a los que hoy en día se utilizan para resolver muchos de los llamados «problemas de punto fijo».

En el capítulo sexto Fourier trata el problema de la distribución del calor en un cilindro sólido circular. Lo novedoso de este problema es que la aplicación del método de separación de variables conlleva considerar desarrollos en serie de la forma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n J_0(j_n x),\ \text{donde}\ J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(z\sin t)dt$$

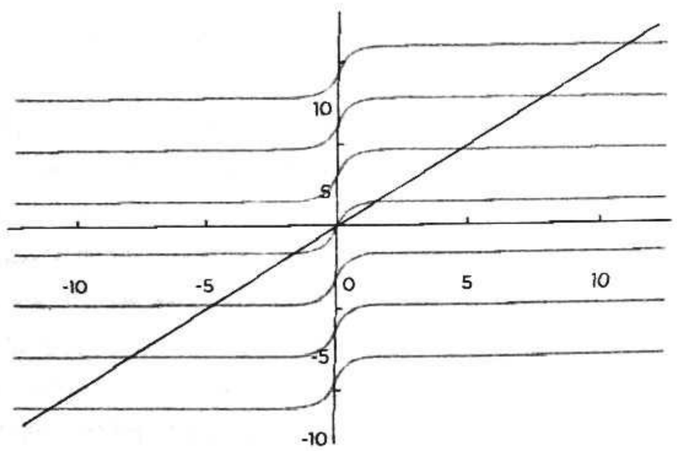
denota la primera función de Bessel y los números j_n se obtienen, de modo similar al caso de la esfera, resolviendo cierta ecuación no lineal. No se trata, pues, de un desarrollo en serie de Fourier de

SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES POR MÉTODOS ITERATIVOS

Supongamos que necesitamos resolver la ecuación $f(x)=0$. Si introducimos la función auxiliar $F(x)=f(x)+x$, nuestro problema se convierte en la búsqueda de los puntos fijos de $F(x)$. Es decir, buscamos las soluciones de la nueva ecuación $F(x)=x$. Existe un método muy general para resolver este tipo de ecuaciones. Basta considerar las sucesiones del tipo $x_{n+1} = F(x_n)$, donde el punto inicial, x_0, debería elegirse lo más cerca que podamos de una solución de la ecuación. Si la función $F(x)$ es continua y la sucesión de valores $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a cierto valor α, entonces es claro que $F(\alpha) = \alpha$. Fourier empleó esta técnica para estudiar su ecuación $x / \tan(x) = \lambda$, transformándola en la ecuación $\arctan(x / \lambda) = x$, teniendo además en cuenta que el rango de la función $\arctan(x)$ se puede tomar igual a cualquiera de los intervalos

$$I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. De este modo, calculó todas las raíces de la ecuación: una por cada uno de estos intervalos.



Los distintos problemas de punto fijo resueltos por Fourier para estudiar la ecuación $x / \tan(x) = \lambda$.

funciones trigonométricas, pero sí de un desarrollo basado en ciertas relaciones de ortogonalidad que aparecen de forma natural al considerar el problema de valores en la frontera asociado a la imposición de que nuestra función tenga variables separadas, verifique las condiciones de contorno impuestas para el caso del cilindro y satisfaga la ecuación del calor en coordenadas cilíndricas.

En los siguientes capítulos (sexto y séptimo) Fourier estudia los casos del cubo y del prisma rectangular, cuyo estudio fuerza la introducción de las series de Fourier de funciones de varias variables.

El último capítulo del libro es quizás el más importante, por la novedad de las técnicas que se introducen. En él se realiza un estudio general del fenómeno de la difusión del calor, con especial interés por el caso de cuerpos de extensión infinita. En particular, la consideración de dominios no acotados implica el uso de funciones que no son periódicas. Fourier se plantea, entonces, si este tipo de funciones se pueden describir en términos frecuenciales, tema que aborda del modo que se explica a continuación.

Supongamos que la función $f(x)$ está definida en toda la recta real y no es periódica. ¿Cómo pueden aprovecharse las series de Fourier para obtener una representación «en frecuencias» de esta función? El matemático aborda este problema considerando, para cada $T > 0$, la función $f_T(x)$ que resulta de extender con período $2T$ la restricción de $f(x)$ al intervalo $[-T,T]$, y calcular su serie de $f_T(x)$. Si la serie converge, debe coincidir con $f(x)$ en $[-T,T]$.

La llamada «transformada de Fourier» surge a partir de aquí cuando hacemos crecer el tamaño de T hasta el infinito. Obviamente, los coeficientes de Fourier de la función $f_T(x)$ dan la descripción en frecuencias de $f(x)$ para $x \in [-T,T]$ y, además, se pueden calcular en su versión compleja, que se deriva de la famosa fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, con la fórmula

$$c_k(f_T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{\frac{2\pi k i x}{2T}}\, dx.$$

Ahora bien, para T suficientemente grande y bajo la hipótesis de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

tendremos que

$$2Tc_k(f_T) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{\pi k i x}{T}}\, dx = F\left(\frac{-\pi k}{T}\right), \text{ donde } F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Esta nueva función $F(\xi)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. Fourier, siguiendo los cálculos que acabamos de esbozar, establece que

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

«La transformada de Fourier es el mecanismo matemático que descompone una función en las frecuencias que la conforman, del mismo modo que un prisma descompone la luz en colores.»

— Barbara Burke Hubbard, *The World According to Wavelets*, 1996.

Por supuesto, esta expresión es válida siempre que se impongan ciertas condiciones sobre $f(x)$ y sobre la forma en la que se interpreta la integral impropia. Además, Fourier demuestra que la aplicación que nos lleva de $f(x)$ a $F(\xi)$ goza de varias propiedades formales que hereda de los coeficientes de Fourier y que, como se verá en el siguiente capítulo, son especialmente útiles para las aplicaciones. Por ejemplo, si consideramos el problema de la distribución del calor en una varilla delgada conductora, homogénea e infinita, y conocemos la distribución inicial de temperaturas $u(x,0)=f(x)$, el uso de la transformada de Fourier nos permite demostrar que la temperatura en la sección de abscisa x en el instante t viene dada por la expresión

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-\frac{1}{4Kt}(x-y)^2}\,dy.$$

Debemos destacar que, si bien las series de Fourier eran viejas conocidas a principios del siglo XIX, la nueva técnica de la transformada de Fourier debe considerarse una creación exclusivamente suya. Las implicaciones que tuvo la introducción de este operador en el desarrollo futuro de las matemáticas y la física son impresionantes. Se hace difícil creer que Fourier pudiera prever o intuir un impacto de tal calibre.

PREFECTO DEL RÓDANO

En 1814 Napoleón abdicó, por lo que la monarquía volvió a instaurarse en Francia. Esto colocaba a Fourier en una posición muy delicada, pues él había colaborado ampliamente con el anterior régimen. Sin embargo, se le permitió continuar en el puesto a las órdenes del rey. Fourier se había cuidado siempre de mantener buenas relaciones con la aristocracia de Grenoble y, además, su conducta al mando de la prefectura de Isère había sido íntegra y al margen de cualquier tipo de atropellos y venganzas. Fourier logró que Napoleón desviara su ruta, evitando su paso por Grenoble y, por tanto, un encuentro embarazoso, cuando este tomó camino de la isla de Elba. Sin embargo, cuando en marzo del siguiente año Napoleón desembarcó en Golfe-Juan con la intención de recuperar el imperio, Fourier no pudo esquivarle.

Tras recibir la noticia del desembarco, así como su inminente paso por Grenoble, Fourier inició los preparativos para la defensa de la ciudad, dando a Napoleón el trato de enemigo. Recordó, en varios bandos, que los ciudadanos se debían al rey y a la Constitución, y anunció la persecución de los que apoyaran al antiguo emperador. Al rey le comunicó por escrito su apoyo incondicional, dándole además explicación detallada de las medidas que había tomado y solicitando nuevas instrucciones. Le aseguraba que la población estaba completamente de su lado, a sabiendas de que nada soportaba dicha afirmación, que era excesivamente optimista incluso para él.

El avance de Napoleón fue sin embargo imparable: allá por donde iba recibía el apoyo casi unánime de la población. Todos estaban hartos de la nueva monarquía. Se respiraba una profunda nostalgia por la Revolución y el imperio.

Por supuesto, Fourier también se había preparado ante la posibilidad de que en Grenoble la población apoyara al general. Cuando Napoleón y su ejército entraron por una de las puertas de la ciudad, él salía, en dirección a Lyón, por otra. Dejaba, eso sí, su casa en la prefectura preparada para acoger al emperador. Incluso cambió la decoración de acuerdo con el gusto del nuevo inquilino, a quien conocía a la perfección. De esta forma, pretendía enviar al general la señal de que era bien recibido, pero no tenía la menor intención de

encontrarse con él, pues no podría explicarle de palabra su apoyo a la monarquía. Sus explicaciones las dejó en forma de carta.

Napoleón, ofendido porque Fourier no le había recibido personalmente y porque, al parecer, huía, decretó que fuera inmediatamente destituido de la prefectura de Isère y, en su comunicado, le declaró «enemigo de la nación».

No está muy claro, pues existen varias versiones de lo sucedido, si Fourier volvió a Grenoble por su cuenta o si fue apresado por el ejército bonapartista. El caso es que ambos hombres se encontraron finalmente en Bourgoin. Napoleón se mostró muy hostil, pero decidió mantenerlo a su servicio, nombrándole con efecto inmediato prefecto del departamento del Ródano. Fourier aceptó el puesto. Luego, una vez se había asegurado su fidelidad, Napoleón preguntó a Fourier qué opinión le merecía el plan de reconquista que tenía entre manos, a lo que este respondió: «Señor, creo que fracasaréis. Encontraréis a un fanático en vuestro camino y todo marchará mal».

Fourier debió de dudar sobre cómo comportarse como prefecto del Ródano, pues veía a Napoleón como un usurpador del poder y, además, pensaba que el nuevo régimen duraría poco tiempo, lo que le condujo a maniobrar intentando preservar una buena relación con la monarquía. Con este objetivo en mente, envió en secreto un mensajero a París en busca de instrucciones precisas. Sin embargo, el emisario no alcanzó su destino y tuvo que volver.

Si atendemos a su versión de la historia, tras el regreso del mensajero Fourier decidió retirarse poco a poco de la escena, «después de paralizar los primeros casos de venganza personal y fanatismo político». Pero existe abundante documentación que demuestra que, en realidad, hubo varios detalles en su comportamiento que podrían delatarle como fiel servidor del nuevo régimen. Por ejemplo, cuando nombraron ministro del Interior a Carnot escribió una carta de felicitación. También apoyó una campaña de propaganda en favor de Napoleón, organizó en la prefectura el reclutamiento de soldados para el nuevo ejército imperial y colaboró en la detención de varios sospechosos políticos. Por otra parte, afirmaba que aprovechó su posición especial para minimizar las injusticias que, debido al cambio de régimen, se produjeron de forma inevitable. El 17 de mayo de 1815 Fourier fue destituido porque se había negado a adoptar ciertas medidas que consideraba extremas y que habían sido ordenadas por Carnot. Napoleón no se mostró, de todos modos, especialmente descontento con los servicios prestados por él, y a los pocos días de su destitución, decretó que este percibiera una pensión vitalicia de 6000 francos anuales. Pero Fourier nunca disfrutó de ese dinero. El 1 de julio de 1815, cuando le habría correspondido recibir su primer cobro, Napoleón ya había abdicado. Fourier tardó, de hecho, más de seis años en recibir un sueldo que reconociera sus contribuciones en la administración, la enseñanza y la investigación.

EL TEOREMA DE DIRICHLET Y LA CONSOLIDACIÓN DEL ANÁLISIS DE FOURIER

En 1829, Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) demostró con exquisito rigor que existe una amplia clase de funciones periódicas cuya serie de Fourier converge puntualmente, recuperándolas en todos los puntos de continuidad de su dominio. Concretamente, demostró que si la función $f(x)$ es periódica, continua a trozos y con primera derivada continua a trozos —es decir, tanto ella como su primera derivada son funciones periódicas que poseen solo un número finito de discontinuidades dentro del intervalo $[0,T]$, donde $T>0$ es el período de la función—, entonces

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2},$$

donde

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

denota la suma parcial N-ésima de su serie de Fourier, siendo la convergencia uniforme sobre los intervalos cerrados que están completamente contenidos en el interior del conjunto de puntos donde la

función $f(x)$ es continua. Aquí $f(x^+)$, $f(x^-)$ denotan, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto x. Recordemos que la convergencia uniforme de la sucesión $S_N f$ a la función f se produce en un intervalo $I=[a,b]$ si, para cada valor $\varepsilon>0$, independientemente de lo pequeño que sea, existe un cierto número natural n_0 a partir del cual podemos garantizar la desigualdad $|f(x)-S_N f(x)|<\varepsilon$ simultáneamente para todo $x\in[a,b]$. Se trata, evidentemente, de un concepto de convergencia mucho más exigente que la mera convergencia puntual.

La idea clave para la demostración de este teorema es conseguir una expresión cerrada para las sumas parciales de la serie, tal como había hecho el propio Fourier en su demostración de que la serie asociada a la función signo es convergente. De hecho, parece claro que el punto de partida —y la chispa— que inspiró a Dirichlet fue el estudio detallado de la prueba que Fourier había dado para este ejemplo concreto. Él encontró una expresión para estas sumas en la que desaparece el sumatorio y se sustituye por una función sencilla que depende de $f(x)$ y de N y a la que podemos aplicar las técnicas habituales del análisis para obtener acotaciones, etc. Esto es, pues, lo que facilitó el cálculo del límite cuando el número de términos de la suma tiende a infinito. Concretamente, tras unos pocos cálculos, Dirichlet demostró que

$$S_N f(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\frac{\sin\left(\frac{2\pi(x-t)(N+1/2)}{T}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(x-t)}{T}\right)}dt$$

y, a continuación, acotó de forma apropiada la diferencia entre $S_N f(x)$ y $f(x)$.

La comunidad matemática aceptó por fin que las series de Fourier eran una herramienta adecuada para representar funciones muy generales. Tras este descubrimiento se abrió, de pronto, un enorme abanico de cuestiones abiertas interesantes cuya solución se antojaba, de pronto, urgente. Por ejemplo, ¿qué funciones satisfacen que su serie de Fourier converge? O, en el caso aperiódico, ¿qué funciones se pueden recuperar completamente a partir de su transformada de Fourier? El esclarecimiento de estas cuestiones dio lugar a la consolidación y el desarrollo moderno del análisis de Fourier.

DECLIVE POLÍTICO E INICIO DE UNA VIDA ACADÉMICA

Tras ser destituido como prefecto del Ródano, Fourier abandonó Lyón y se instaló en París. Era un momento de completa decadencia. Ya no podía tener influencia política ninguna. Tampoco podía ocupar su plaza de profesor en la Politécnica y, aunque tenía derecho a una pensión vitalicia, esta no llegaba. Sus quejas no eran atendidas o se le contestaba negándosele un derecho que él sabía le asistía. Peor aún: al poco tiempo el gobierno también anuló el pago de los 4 000 francos que le correspondían por su título de barón.

Solo en una ocasión el ministro del Interior de turno le expresó su reconocimiento a los servicios que había prestado al Estado, y que le hacían merecedor de una compensación económica:

> Barón Fourier: No he olvidado lo que me contó en julio y lo que entonces le respondí. Le comunico mi deseo de obtener para usted una pensión por todos sus trabajos literarios y en la administración. Tengo constantemente presente la necesidad de esta petición y aprovecharé la primera oportunidad que se me presente para proponer su concesión (al rey). Tengo ante mis ojos su recuerdo. El servicio fundamental que hizo al Estado con los trabajos de desecación que se completaron y se llevaron a cabo bajo su dirección no es el tipo de servicio que pueda permanecer sin reconocimiento.

Sin embargo, la pensión no llegaba. Finalmente en 1821 llegaría una carta en la que, por cuestiones burocráticas, y con el argumento de que al abandonar la prefectura del Ródano contaba con menos de sesenta años, se le denegaba tajantemente su derecho a percibirla. Fourier, indignado, decidió no insistir más.

Pero Fourier tuvo, de todas formas, un último golpe de suerte. Se estaba planteando seriamente emigrar a Gran Bretaña, donde no sería perseguido políticamente y quizá podría dedicarse a la enseñanza de las matemáticas y la física. Entonces la persona que ocupaba la posición de prefecto del Sena, el conde de Chabrol de Volvic (1773-1843), quien había sido alumno de la Escuela Politécnica cuando Fourier impartía allí sus clases y luego había participado en la campaña de Egipto, decidió nombrarle director de la Oficina de Estadísticas del Sena.

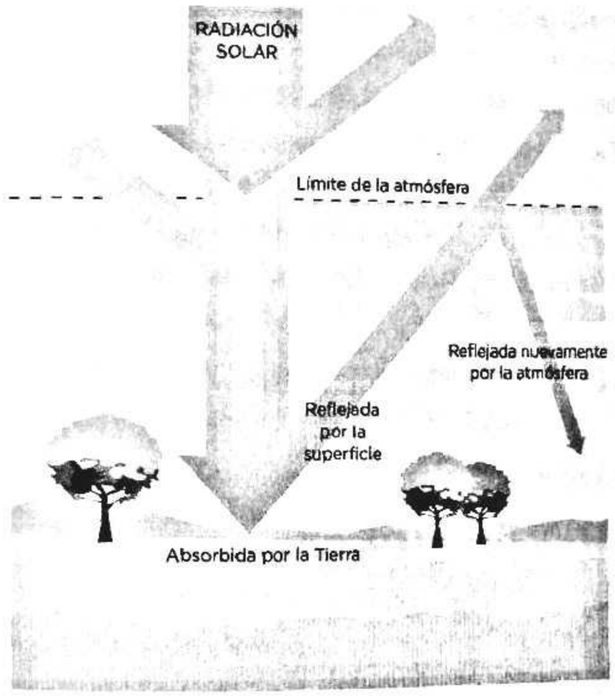
En 1816 Fourier fue elegido «académico libre» para la clase de Ciencias de la Academia pero, en el último momento, el rey Luis XVIII rechazó el nombramiento. Poco después, en abril de 1817, el fallecimiento de Alexis Rochon (1741-1817), uno de los miembros de la sección de Física de la Academia, generó una nueva vacante y esta vez Fourier contó con el apoyo del vizconde de Dubouchage, uno de sus amigos de la época de Grenoble, que entonces ostentaba el puesto de ministro de la Marina. Esto garantizó la aprobación definitiva del rey y Fourier, como académico, se aseguró un segundo sueldo vitalicio. A partir de entonces pudo, por fin, realizar su sueño de dedicarse, de forma casi exclusiva, a la investigación.

Hay que decir que Fourier nunca abordó el problema de la naturaleza física del calor. En sus escritos asumía la terminología al uso, que era la de la teoría material del calor, pero en ningún momento mencionó el debate que esta teoría suscitaba ni se posicionó de una u otra parte. A él le interesaban las aplicaciones prácticas y la experimentación, sobre todo porque, a fin de cuentas, eran los experimentos los que debían confirmar la validez de las ecuaciones diferenciales que había propuesto como modelo matemático de la conducción del calor. Esta actitud más bien pragmática de Fourier ante los aspectos fundacionales de la física queda muy bien descrita en las siguientes frases del historiador de las matemáticas y la lógica Ivor Grattan-Guinness:

> El interés principal [de Fourier] estaba en la descripción matemática de la difusión del calor a partir de una situación inicial dada. Cómo había surgido esta situación en primera instancia no era algo que le preocupase.

EL EFECTO INVERNADERO

Cuando publicó su *Teoría analítica del calor* Fourier tenía en mente el proyecto de redactar un segundo volumen en el que se tratarían en detalle los aspectos más físicos del problema. Y, aunque dicho volumen no llegó a buen puerto, publicó varios artículos que se centraban en las aplicaciones físicas. En particular se ocupó de estudiar la distribución de temperaturas tanto en el interior como sobre la superficie de la Tierra, considerando el planeta como una esfera de radio muy grande, y fue la primera persona que identificó y analizó el efecto invernadero. Concretamente, sus cálculos le habían llevado a la conclusión de que la Tierra, si es calentada exclusivamente por la energía que recibe por la radiación solar, debería ser un planeta más frío de lo que en realidad experimentamos. Como explicación a este fenómeno consideró la posibilidad de que la atmósfera actúe en realidad como un aislante térmico.



Esquema simplificado del efecto invernadero: la atmósfera refleja hacia la Tierra parte de la energía que esta había reflejado previamente.

De hecho, él parece haber tratado el calor como una acción básica de la naturaleza, en términos de la cual se podían explicar otros fenómenos, pero que ella misma no se podía expresar a partir de otros fenómenos. Esta actitud puede ser interpretada de manera natural como lo

que ahora denominamos una visión «positivista» del calor, que rechaza explicaciones metafísicas de los fenómenos en tanto en cuanto estos no sean susceptibles de una medición directa. Así pues, para Fourier, «el calor era el calor», y se oponía, en particular, a la filosofía laplaciana según la cual el calor y, de hecho, todos los fenómenos físicos, era consecuencia de la acción newtoniana a pequeñas distancias.

[...] Nuestro uso del término «positivista» para describir la postura de Fourier no es arbitrario, pues Auguste Comte (1798-1857), uno de los fundadores del positivismo moderno, tomó el trabajo de Fourier sobre la difusión del calor como el paradigma tanto para las matemáticas como para la física, y le dedicó su *Curso de filosofía positiva* cuando comenzó a impartir sus clases en la Escuela Politécnica, con Fourier entre la audiencia.

Resulta, pues, normal, constatar que Fourier no mostró interés cuando, en 1824, el físico e ingeniero francés Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832) publicó sus *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego*. De hecho, esta obra, que luego se consideró uno de los trabajos fundacionales de la termodinámica clásica, fue ignorada por la comunidad científica por más de una década y, para cuando fue «descubierta», Fourier ya había fallecido.

FOURIER Y LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

Tras publicar la *Teoría analítica del calor*, Fourier decidió redactar una monografía sobre el tema que, probablemente, le había inspirado la vocación matemática en su juventud: la teoría de ecuaciones. En efecto, su primer trabajo de investigación contenía una generalización de la conocida regla de los signos de Descartes. Concretamente, había demostrado que si $p(x)$ es un polinomio de grado $\leq m$ y con todos sus coeficientes reales, k_x denota el número de cambios de signo que se producen en la sucesión de valores

$$p^{(m)}(x), p^{(m-1)}(x), \cdots, p'(x), p(x),$$

APLICACIÓN DE LA ACOTACIÓN DE FOURIER A UN CASO PARTICULAR

Tomemos $p(x) = x(1-x)^2$ y $[a,b] = [-2,2]$. Este polinomio tiene exactamente dos raíces en este intervalo. ¿Cuál es, pues, la cota proporcionada por Fourier? Algunos cálculos permiten rellenar la siguiente tabla:

	$a=-2$	$a=2$
$p(x) = x(1-x)^2$	$p(-2) = -18$	$p(2) = 2$
$p'(x) = 3x^2 - 4x + 1$	$p'(-2) = 21$	$p'(2) = 5$
$p''(x) = 6x - 4$	$p''(-2) = -16$	$p''(2) = 8$
$p'''(x) = 6$	$p'''(-2) = 6$	$p'''(2) = 6$
	$k_{-2} = 3$	$k_2 = 0$

Se sigue que el polinomio tiene a lo sumo $k_{-2} - k_2 = 3$ raíces en este intervalo, como es el caso. Este cálculo también deja claro que la cota de Fourier puede proporcionar una cantidad estrictamente mayor que el verdadero número de ceros que se está estimando. Los mismos cálculos nos dicen que, por ejemplo, $k_0 = 2$ y $k_1 = 0$, por lo que podemos afirmar que este polinomio tiene a lo sumo dos ceros en $]0,1[$ (no tiene ninguno) y, además, no tiene ceros en $]1,2[$.

y $a<b$, entonces el polinomio $p(x)$ tiene a lo sumo $k_a - k_b$ ceros en el intervalo $]a,b[$. De acuerdo con la suerte que habían tenido sus otros trabajos, la publicación de este breve artículo, que Fourier había sometido a consideración ya en 1788, se retrasó hasta 1818 y, como consecuencia, su contribución se vio inmersa en una nueva discusión sobre prioridades. Budan de Boislaurent (1761-1840), un médico aficionado a las matemáticas, publicó en 1807 un panfleto en el que demostraba varios resultados similares a los que acabamos de nombrar. Fourier, que en aquella época estaba inmerso en la redacción de su primera memoria sobre la distribución del calor, no tuvo tiempo de reaccionar o, simplemente, no prestó atención al artículo de Budan, a pesar de que fue advertido sobre

su existencia. Entonces Budan, en 1811, sometió su trabajo ante la Academia y obtuvo informes favorables de Lagrange y Legendre. En sintonía con las costumbres de esta institución, la publicación de este artículo también se vio retrasada, esta vez hasta 1827. Mientras tanto, el de Fourier apareció en 1818 y esto causó la exasperación de Budan, quien en 1822 reeditó su panfleto, incluyendo un apéndice con el artículo que había sometido en 1811, y reclamó para sí los resultados publicados por Fourier.

Sin embargo, el mérito recayó finalmente en Fourier, pues cuando el problema fundamental, la determinación exacta del número de ceros de un polinomio $p(x)$ en el intervalo $[a,b]$, fue resuelto en 1829 por el matemático francés Charles Sturm (1803-1855), este explicó que su resultado era una generalización del de Fourier y, además, la lectura de varios manuscritos de Fourier, aún sin publicar, le habían servido de inspiración. Sin duda, Sturm se refería al libro que Fourier había estado redactando sobre ecuaciones algebraicas, y cuya publicación, bajo el título *Análisis de las ecuaciones determinadas*, tuvo lugar de forma póstuma en 1831. En dicho texto podemos encontrar resultados sobre raíces reales (y complejas) de polinomios, así como sobre su aproximación numérica. En particular, en él se generaliza el conocido método de Newton-Raphson.

Aunque Fourier no llegó a completar la obra, sí adelantó un índice de contenidos. Al leerlo, puede apreciarse que tenía en mente un proyecto importante. No podemos sorprendernos al descubrir también aquí el interés que Fourier mostraba entonces por las aplicaciones.

Lo que sí resulta sorprendente, y nos da una nueva muestra de su genio, es que el manuscrito contenía los principios básicos de la programación lineal, que es actualmente una herramienta fundamental en matemática aplicada. Pero Fourier no había desarrollado una teoría general, sino solo algunos ejemplos no triviales en base a los cuales se había percatado del inmenso potencial contenido en estas ideas.

Sesenta años después, el también matemático francés Jean-Gaston Darboux (1842-1917) comentaría que, en su opinión, el entusiasmo de Fourier por las desigualdades era exagerado.

Niels Henrik Abel.

Évariste Galois.

FOURIER, ABEL Y GALOIS: HISTORIA DE UN INFORTUNIO

A partir de su nombramiento como secretario perpetuo, Fourier tuvo que diversificar sus actividades, lo cual le restó tiempo para ahondar en su propia investigación. Se ocupaba, entre otras cosas, de la adjudicación de árbitros para los distintos manuscritos que llegaban a la Academia, así como de la redacción de los obituarios de los académicos que fallecían. Fue él quien redactó, por ejemplo, el elogio fúnebre de Laplace. Con los árbitros no siempre hizo elecciones afortunadas. Se le recuerda por haber perdido los manuscritos presentados por el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) en 1826 y el francés Évariste Galois (1811-1832) en 1829. Fourier entregó a Legendre y a Cauchy el manuscrito de Abel. Legendre lo retuvo y Cauchy ni siquiera lo examinó. Posteriormente, Jacobi, que había leído un artículo del matemático noruego en el que este trabajo se referenciaba, mostró interés por la memoria y Legendre se la entregó. El artículo se publicó en 1841. Fourier también entregó a Cauchy la memoria de Galois, y esta se extravió. Entonces Galois volvió a enviar una segunda versión, pero con la poca fortuna de que el momento elegido coincidió con la muerte de Fourier, y también esta vez se perdió el manuscrito. Galois envió una tercera versión, que fue devuelta por Poisson con el calificativo de «ilegible». Seis meses después Galois falleció en un duelo.

SECRETARIO PERPETUO DE LA ACADEMIA

Delambre, que ocupaba el puesto de secretario perpetuo de la Academia, falleció en agosto de 1822, dejando el puesto vacante. En la sesión del 11 de noviembre se propusieron como candidatos a sustituirle los nombres de François Arago (1786-1853), Biot y Fourier. Este último se sentía ganador, pero no las tenía todas consigo porque dudaba de que Biot pudiera emplear algún tipo de argucia. En efecto, en una carta a su amiga Sophie Germain, el único «posible amor» que se le conoce, afirmaba: «No albergo dudas de que el deseo de la mayoría de mis colegas será elegirme [...] pero Biot tiene el recurso a tantos artificios que sería imprudente de mi parte no temerle».

En la sesión en la que se decidía el nombramiento, el 18 de noviembre, Arago retiró su candidatura alegando que sus muchas ocupaciones le impedían responder apropiadamente a las obligaciones que el puesto requería. Biot se mantuvo como candidato, y en la votación Fourier ganó con 38 votos a favor frente a los 10 que obtuvo su contrincante. El 6 de enero de 1823 se anunció la aprobación del nombramiento por el rey y Fourier pasó a ocupar el más alto puesto que la Academia podía concederle.

Lo cierto es que se encontraba débil y, con cierta frecuencia, se vio forzado a ausentarse de las sesiones de la Academia. En 1823 Fourier fue nombrado miembro extranjero de la Royal Society de Londres y en 1827 sucedió a Laplace como presidente del Consejo de Perfeccionamiento de la Escuela Politécnica. Este fue, quizás, el momento cumbre de su vida académica.

Fourier estuvo intermitentemente enfermo durante los últimos cinco años de su vida. Por lo visto, padecía de reumatismo crónico, aunque también es posible que su salud se hubiera debilitado como consecuencia de haber enfermado de malaria durante la campaña de Egipto.

Sus últimos meses fueron duros. Necesitó la ayuda de un mayordomo para sentarse dentro de una especie de caja de la que solo sobresalían cabeza y brazos, lo cual le permitía trabajar. Por las noches sufría insomnio y, además, se veía obligado a permanecer casi completamente erguido. Aun así, continuó trabajando. En ese período escribió varios manuscritos matemáticos que, como luego pudo comprobarse, quedaron ilegibles. El 4 de mayo de 1830, mientras bajaba unas escaleras, sintió un fuerte dolor. No prestó atención al aviso que su cuerpo le había enviado y continuó con su rutina, trabajando. El 16 de mayo entró en colapso y falleció.

CAPÍTULO 4

El legado de Fourier

El desarrollo de las ideas de Fourier ha logrado un impacto que, en su momento, resultaba impredecible. Su trabajo ha motivado la creación de importantes ramas de la matemática pura y su efecto se puede percibir en temas tan variados como el análisis complejo, la teoría de grupos o la teoría analítica de números. Además, sus ideas tienen un puesto de privilegio en el mundo de las aplicaciones, y son la base de importantes desarrollos tecnológicos sin los cuales no se explicaría el mundo actual tal y como lo conocemos.

El análisis de Fourier encontró en la acústica una de sus principales motivaciones, al interpretar todo sonido como superposición de armónicos puros. Según este principio, las señales sonoras se descomponen como suma de ciertas ondas que oscilan con una frecuencia bien definida y con total regularidad. Como los sonidos que pueden emitirse son, en principio, arbitrarios, tiene sentido asumir que cualquier función admite este tipo de descomposición, y eso es lo que hizo Fourier. Luego puede aplicarse este principio en contextos diferentes, siguiendo una regla de oro de la física según la cual los mismos principios o incluso las mismas ecuaciones pueden servir de modelo para fenómenos físicos diferentes porque la naturaleza elige unos pocos principios que luego explota al máximo. Esto lleva a aplicar la idea de descomponer señales como suma de armónicos puros a contextos muy diversos. Fourier la aplicó en su estudio de la ecuación del calor y, en dicho empeño, aportó además numerosas ideas que luego tendrían importancia en diferentes campos de la física y la matemática.

Si se escribe la igualdad

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi kt}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

puede verse que, en el miembro de la izquierda, se tiene una función —supuestamente arbitraria— cuyo valor es conocido para cada

instante del tiempo. Esta función está expresada, en el miembro de la derecha de la igualdad, como suma de ciertas funciones fijas, los senos y los cosenos, que representan los armónicos puros. Los coeficientes de Fourier —los números a_k, b_k de la fórmula— nos dicen cuál es exactamente la contribución que se requiere de cada armónico puro para recuperar exactamente la señal $f(t)$. Estos números actúan, en cierto modo, como un código de barras que define perfectamente la función en términos de frecuencias. Además, se puede demostrar que también informan sobre la aportación a la energía de la señal para cada una de las frecuencias que intervienen en su descripción —este resultado se llama teorema de Parseval—. Se ha hecho, de este modo, un viaje desde el mundo del tiempo al de las frecuencias. Lo que hace especialmente importante esta transformación es que puede revertirse. Es decir, el viaje que acaba de describirse es de ida y vuelta. Puede rescatarse el valor de esta señal en cada instante de tiempo a partir de su código de barras en el mundo de las frecuencias. El cálculo de los coeficientes se llama «análisis de la señal» y la recuperación de esta a partir de su descripción en frecuencias se denomina «síntesis de la señal». Este proceso se puede realizar siempre que la señal analizada sea periódica.

El teorema de Dirichlet garantiza que la clase de funciones a las que puede aplicarse este proceso de análisis y síntesis es, en verdad, muy amplia. Dicho teorema fue, en realidad, solo el primer paso de un camino extraordinariamente largo y complejo, que sirvió como fundamento a varias áreas importantes del análisis matemático. A partir de su publicación, numerosos matemáticos comenzaron a preguntarse cuál es la descripción exacta de las funciones periódicas cuyas series de Fourier las representan fielmente, y en qué diversos sentidos puede estudiarse la convergencia de las mismas. Así, por ejemplo, en torno a las series de Fourier se formularon conceptos como los de convergencia puntual, convergencia uniforme, convergencia en norma —para diferentes tipos de normas— o, incluso, convergencia en sentido distribucional y convergencia en medida de una sucesión de funciones. Estos conceptos motivaron, además, la creación del análisis funcional, así como amplias partes de la teoría de aproximación, la teoría de espacios de funciones, etc.

Algunas preguntas que se estudiaron son las siguientes: ¿puede acelerarse la convergencia de una serie? ¿Existen distintos modos de «sumar» una serie de Fourier? ¿Qué resultados sobre convergencia se pueden extender de las funciones de una variable a las funciones de varias variables? ¿Cómo se relaciona la suavidad de las funciones con la velocidad con la que decaen sus coeficientes de Fourier? Muchas de estas preguntas necesitaron un estudio detallado que costó décadas y cuya solución requirió introducir numerosas ideas que, sin duda, marcaron un nuevo estilo de hacer matemáticas. Por supuesto, algunos aspectos tienen un interés meramente matemático, pero eso no los hace menos valiosos ni menos interesantes, aunque sí más difíciles de divulgar, por su carácter excesivamente abstracto y técnico. Además de los aspectos teóricos que acaban de mencionarse, el análisis de Fourier ocupó rápidamente un lugar de privilegio en el mundo de las aplicaciones en física, ingeniería y, sobre todo a partir de la llegada de los ordenadores y otros dispositivos tecnológicos, en medicina, biología, etc.

Este capítulo se centra en unos pocos aspectos relacionados con las aplicaciones, que explican el impacto del análisis de Fourier en nuestra vida actual. Para poder cumplir con este objetivo debe introducirse el que probablemente sea el principio matemático más importante para las aplicaciones del análisis de Fourier, que es el llamado «teorema de convolución».

FILTRADO DE SEÑALES

La convolución de señales es la forma matemática con la que se describen los llamados filtros de ondas. No cabe duda de que para las aplicaciones interesa conocer especialmente la versión en frecuencias de las señales que se estudian. Una vez se ha aceptado esto, es fácil reconocer la importancia fundamental que tiene el disponer de dispositivos físicos que filtren las señales, eliminando ciertas frecuencias y dejando pasar otras sin tocarlas.

Dada una señal $f(t)$, el filtro ideal que permite el paso de ciertas frecuencias seleccionadas previamente y elimina el resto de

frecuencias de esta señal se logra multiplicando su transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)(u)$ por una función $H(u)$ que toma valor 1 en aquellas frecuencias u cuyo paso queremos permitir y se anula en las frecuencias que deseamos eliminar. Si la función $H(u)$ es la transformada de Fourier de cierta señal h, entonces esta operación se puede describir en el dominio del tiempo como una convolución. Concretamente, se sabe que

$$\mathcal{F}(f*h)(u) = \mathcal{F}(f)(u)\cdot\mathcal{F}(h)(u) = \mathcal{F}(f)(u)\cdot H(u),$$

donde

$$(f*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

es la convolución de las señales f y h.

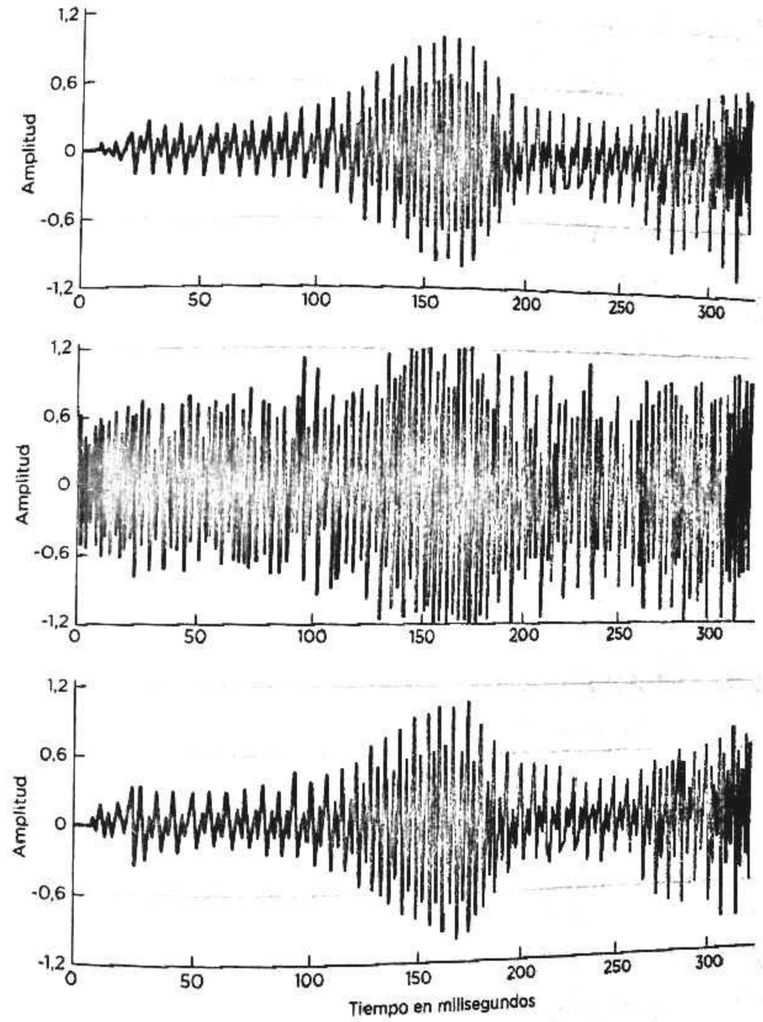
La transformada de Fourier surgió del intento de extender los procesos de análisis —en frecuencias— y síntesis —en el dominio del tiempo— a señales no periódicas. Este concepto se extendió posteriormente a otros objetos, como las funciones cuasi-periódicas o las distribuciones temperadas, que son una generalización extremadamente abstracta pero muy útil de las funciones ordinarias. Además, para las aplicaciones, se introdujo un análisis de Fourier de señales digitales que resulta especialmente útil cuando estas se obtienen tomando muestras de señales analógicas. En todos estos contextos existe un resultado análogo al teorema de convolución que acaba de describirse, y que resulta de enorme importancia en las correspondientes aplicaciones.

SERIES DE FOURIER GENERALIZADAS

Aunque no es evidente a simple vista, el cálculo de los coeficientes de Fourier de una señal periódica se basa en un argumento geométrico. Este cálculo se explica nítidamente si se introduce un concepto de «espacio» que facilite la medición de distancias y ángulos en un contexto que contemple la existencia de infinitas dimensiones. De hecho, las distintas frecuencias que intervienen

FILTRADO DE SEÑALES

En la imagen puede verse un ejemplo de filtrado de señales. En la primera gráfica se representa un trozo de señal de voz, limpia. Luego se presenta el resultado de sumar ruido aleatorio a dicha señal. Finalmente, se muestra la señal recuperada tras pasar un filtro paso bajo a la señal contaminada por ruido.



en la descripción de la señal representan las dimensiones del espacio en cuestión, y los coeficientes de Fourier sirven para cuantificar la contribución a la señal de cada una de estas dimensiones.

Por supuesto, no es sencillo definir el concepto de «espacio» en términos abstractos. Esto es, además, mucho más complicado si se aborda la cuestión desde un punto de vista filosófico. Sin embargo, todos tenemos una idea intuitiva, basada en nuestra experiencia sensorial, de lo que es el espacio que nos rodea, nuestro mundo, dentro del cual nos desplazamos y hacemos todo tipo de cosas. Ese espacio que todos compartimos se formaliza, en términos matemáticos, como el espacio euclídeo de dimensión tres, $\mathbb{R}^3$. En él podemos medir distancias y calcular ángulos de forma sencilla. Con la ayuda del álgebra, estas operaciones se definen a partir del producto escalar de vectores. En efecto, dados los vectores $x=(x_0,x_1,x_2)$ e $y=(y_0,y_1,y_2)$ del espacio ordinario, su producto escalar viene dado por

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=0}^{2}x_iy_i\,,$$

la distancia que los separa es

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle},$$

y el ángulo que forman se calcula despejando θ en la fórmula $\langle x,y\rangle=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$. En particular, dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero.

Supongamos ahora que tomamos dos vectores u,v del plano $\mathbb{R}^2$ que son perpendiculares. Entonces el resto de vectores $x\in\mathbb{R}^2$ se pueden escribir de forma unívoca como $x=au+bv$ para ciertos valores $a,b\in\mathbb{R}$. Es más, dichos valores —o coordenadas— se calculan de forma explícita en términos del producto escalar, y satisfacen las fórmulas

$$a=\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\ \text{y}\ b=\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}.$$

Estas ideas admiten una extensión inmediata al espacio euclídeo de dimensión N,

$$\mathbb{R}^N=\{x=(x_0,\cdots,x_{N-1}):x_i\in\mathbb{R},i=0,\cdots,N-1\},$$

y, de hecho, se extienden a un contexto mucho más amplio por el sencillo mecanismo de generalizar los conceptos de «espacio» y «producto escalar en un espacio».

> «La geometría es la ciencia descriptiva del espacio. Pero, ¿qué clase de cosa es el espacio? [...] Cuando intentamos reflexionar sobre lo que el espacio es en y por sí mismo, nos vemos desconcertados.»
>
> — LAWRENCE SKLAR, *FILOSOFÍA DE LA FÍSICA*, 1992.

Por «espacio» se entiende cualquier conjunto en el que se han introducido las operaciones de suma y producto por un escalar, y en el que estas satisfacen las propiedades usuales de los vectores del espacio ordinario. Estos espacios representan un excelente modelo para numerosos procesos físicos en los que se producen fenómenos de superposición (suma) y modulación (atenuación o amplificación) de magnitudes. Por ejemplo, el sonido viaja en ondas que, al encontrarse, se suman. Cuando escuchamos varios sonidos simultáneamente, oímos su superposición, es decir, su suma. Un sonido tendrá un volumen más elevado o más débil —o, dicho de otra forma, se percibirá como más cercano o más alejado— en función de la amplitud de la onda —no de su forma, ni de su frecuencia de vibración—, y dicha amplitud cambia cuando multiplicamos por un número toda la señal sonora. Por tanto, los sonidos representan perfectamente los elementos de un espacio en el sentido que acaba de describirse. Lo mismo sucede con las ondas electromagnéticas, las señales eléctricas recogidas en los electroencefalogramas y electrocardiogramas, los magnetoencefalogramas, los sismogramas, etc., así como con todo tipo de imágenes digitales, reproduzcan estas un paisaje, un retrato, una imagen médica, etc. El nombre que se usa en matemáticas para este concepto de espacio es «espacio vectorial» y se le añade el apellido real o complejo en función de que permitamos que la multiplicación o modulación se realice con números reales o complejos, respectivamente.

Dado H, un espacio vectorial cualquiera, un producto escalar es una aplicación que, dados dos elementos x,y cualesquiera del espacio, nos devuelve un escalar $\langle x,y\rangle$. Esta aplicación debe satisfacer las mismas propiedades que tiene el producto escalar usual de vectores del espacio ordinario —es decir, debe ser bilineal, simétrica y definida positiva—. Los espacios vectoriales sobre los que se ha definido un producto escalar se llaman euclídeos porque en ellos es posible introducir los conceptos básicos de la geometría euclídea, que son la distancia y el ángulo.

Si H es un espacio dotado de un producto escalar y

$$\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$$

es una familia de elementos (no nulos) que genera un subespacio denso y satisface las condiciones de ortogonalidad $\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle=0$ cuando $n\neq m$, entonces todo elemento $x\in H$ satisface la fórmula

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle x,\varphi_k\rangle}{\langle\varphi_k,\varphi_k\rangle}\varphi_k,$$

que toma el nombre de «descomposición de Fourier» en la base $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ o, también, «serie de Fourier generalizada». La convergencia de la serie se considera en el sentido de la distancia definida en H. Este resultado generaliza las series de Fourier a un marco muy amplio, y ha sido intensamente utilizado en contextos muy diversos. Los coeficientes de Fourier del vector x respecto de la base ortogonal son, pues, los números

$$c_k(x)=\frac{\langle x,\varphi_k\rangle}{\langle\varphi_k,\varphi_k\rangle},\ k=0,1,2,\cdots,$$

y conocerlos permite su completa recuperación. El estudio de este tipo de descomposiciones, bajo la restricción adicional de que las funciones φ_n sean polinomios algebraicos, ha dado lugar a una importante rama del análisis, la teoría de polinomios ortogonales, que tiene importancia fundamental en numerosas partes de la física y la ingeniería. Además, algunos ejemplos de series de Fourier generalizadas aparecían ya explícitamente en los capítulos finales de la *Teoría analítica del calor*, por lo que

su estudio se mostró relevante desde los mismísimos inicios del análisis de Fourier.

LA DIGITALIZACIÓN DEL MUNDO

Desde el punto de vista de las aplicaciones, el ejemplo más útil que existe de espacio con producto escalar es, en realidad, un caso extremo, en el que la cuestión de la convergencia de las descomposiciones de Fourier desaparece, por ser innecesaria. En efecto, esto sucede cuando el espacio base, dentro del cual realizamos los cálculos, tiene dimensión finita. Concretamente, podemos asumir que trabajamos en $\mathbb{C}^N$ con el producto escalar usual,

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=0}^{N-1}x_k\overline{y_k}.$$

En este contexto surgen dos bases ortogonales que son vitales. La primera es la base canónica, formada por los vectores $e_k=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, donde el 1 aparece en la posición $(k+1)$-ésima del vector. Esta base nos proporciona de forma natural la representación del vector x como una señal en el dominio del tiempo. Si se interpreta este vector como resultado de tomar muestras de los valores de una señal analógica, el número x_k es sencillamente el valor de la señal en el instante k y se suele usar indistintamente la notación x_k o $x(k)$. Si el muestreo se hace uniformemente con período de muestreo T, entonces x_k representará el valor $x(kT)$. La segunda base fundamental es la que nos describe estas señales en términos de frecuencias. Se trata de la base formada por los vectores

$$E_k=\sum_{n=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi ikn}{N}}e_n.$$

Que estos vectores forman un sistema ortogonal en $\mathbb{C}^N$ es un cálculo basado en aplicar a

$$x=e^{\frac{2\pi i(k-k')}{N}}$$

la fórmula

$$1+x+\cdots+x^{N-1}=\frac{x^N-1}{x-1}.$$

Se sigue que todo vector $x\in\mathbb{C}^N$ admite una expresión del tipo

$$x=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}(k)E_k,$$

donde

$$\hat{x}(k)=\langle x,E_k\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{\frac{-2\pi ikn}{N}}.$$

Llamamos «transformada discreta de Fourier» (o DFT) del vector x al vector $DFT(x)=\hat{x}=(\hat{x}(0),\cdots,\hat{x}(N-1))$. Del mismo modo que los coeficientes de Fourier de la señal periódica $f(t)$ nos describen su comportamiento en frecuencias, los coeficientes de la DFT del vector x nos informan sobre las coordenadas del vector x en la base de las frecuencias de $\mathbb{C}^N$.

La importancia de la DFT proviene del teorema del muestreo, que surge de una interesante mezcla de física y matemáticas. En pocas palabras, este resultado garantiza una transición suave, en la que no se produce pérdida de información, desde el mundo analógico al mundo discreto, que es el mundo que podemos describir con vectores finitos —en el caso unidimensional—, matrices finitas —en el caso bidimensional—, etc. Por ejemplo, si estamos trabajando con señales sonoras, este teorema nos dice que basta tomar 40 000 muestras por segundo de las señales que estamos analizando para disponer de información suficiente para recuperarlas al completo teniendo en cuenta la precisión del oído humano. De este modo, el sonido —que es una señal analógica que varía con el tiempo y, por tanto, es susceptible de ser evaluada en todo el continuo de la recta numérica— queda completamente determinado a partir de un conjunto discreto de muestras. Este proceso se denomina «discretización». Si, además, solo permitimos que la señal tome un valor en un conjunto discreto de puntos —lo cual, por sí solo, recibe el nombre de «cuantización de la señal»—, hablaremos de «digitalización». El teorema del muestreo nos dice

que todas las señales físicas que podamos medir se pueden discretizar sin perder la información que contienen.

LA DISCRETIZACIÓN DEL MUNDO

Si la señal f es de energía finita, ser de banda limitada significa que $\mathcal{F}(f)(u)=0$ para todo valor u que esté fuera de cierto intervalo $[-W,W]$. El menor $W\geq 0$ con esta propiedad se denomina «ancho de banda» de la señal. Si usamos la notación F para la extensión $2W$-periódica de la restricción de $\mathcal{F}(f)$ al intervalo $[-W,W]$, entonces F es una función periódica de energía finita y, por tanto, coincide con su desarrollo en serie de Fourier,

$$F(u)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(F)e^{\frac{\pi iku}{W}}.$$

Por otra parte, los coeficientes de Fourier de F están dados por

$$c_k(F) = \frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}F(u)e^{\frac{2\pi iku}{2W}}du=\frac{1}{2W}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f)(u)e^{\frac{2\pi iku}{2W}}du=$$

$$= \frac{\pi}{W}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))\left(\frac{-k}{2W}\right)=\frac{\pi}{W}f\left(\frac{-k}{2W}\right).$$

Se sigue que la transformada de Fourier de f queda completamente determinada a partir de los valores que toma la señal en los puntos $k/(2W)$ con $k\in\mathbb{Z}$ y, por tanto, también la propia señal f queda determinada a partir de estos valores y, de hecho, se puede recuperar sumando la serie

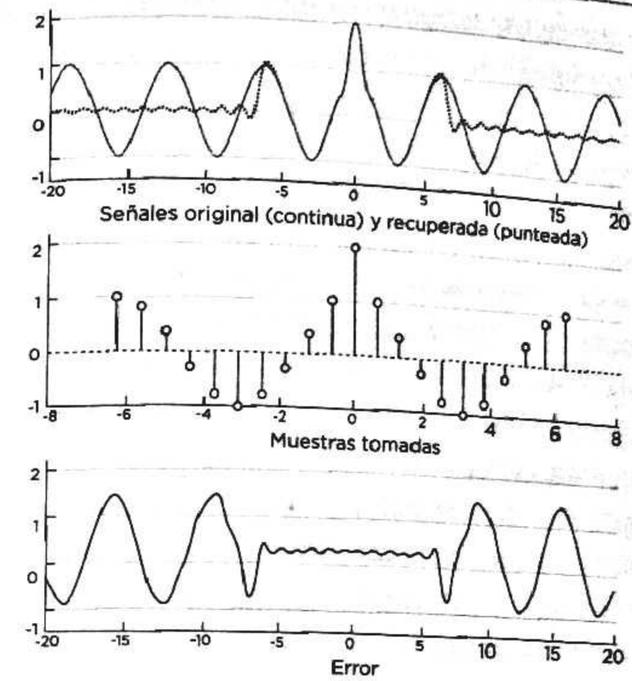
$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k/2W)\frac{\sin((2Wt-k)\pi)}{(2Wt-k)\pi}.$$

Por tanto, si W es el ancho de banda de la señal, entonces podemos recuperarla a partir de muestras equiespaciadas cuando el muestreo se realiza con la frecuencia $2W$, que se llama «frecuencia de Nyquist»,

en honor al físico e ingeniero estadounidense (aunque nacido en Suecia) Harry Nyquist (1889-1976), que conjeturó el resultado en un artículo de 1928. De todas formas, el teorema había sido ya demostrado en Gran Bretaña por Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), en 1915. El mismo resultado también lo demostró independientemente el matemático Vladimir Kotelnikov (1908-2005) en 1933, por lo que en Rusia se le atribuyó a él durante mucho tiempo. En 1948, Claude Shannon (1916-2001) lo reintrodujo en el contexto de la ingeniería al utilizarlo en sus trabajos fundacionales sobre teoría de la información. Como consecuencia de todas estas contribuciones, hoy se conoce como teorema del muestreo de Shannon-Whittaker-Kotelnikov (aunque en algunos contextos se le conoce como «teorema del muestreo de Nyquist-Shannon»). Existen muchas variaciones del resultado. Por ejemplo, se puede probar que la misma fórmula se satisface para distribuciones temperadas cuya transformada de Fourier tiene soporte compacto. Además, este teorema se extiende a las señales analógicas de varias variables y admite una versión en el mundo digital.

La razón por la cual el principio de discretización es de uso universal es sencilla y tiene una explicación físico-matemática. La materia y la energía están «cuantizadas»: esto implica que existen limitaciones para el tamaño de las partículas y, además, su capacidad de vibrar se mantiene dentro de unos márgenes limitados. Por otra parte, toda la información que recibimos del mundo exterior a través de los sentidos, por vía de magnitudes físicas como la luz, el sonido, la presión o el calor, se explica como resultado de la vibración de ciertas partículas. A esto cabe añadir que el sistema nervioso impone restricciones adicionales a las vibraciones que podemos percibir. Se sigue que, en todos los casos de interés, las señales registradas por los sentidos o por cualquier sistema de medición del que se disponga son necesariamente de banda limitada. Es decir, cuando las vemos en el mundo de las frecuencias, todas las frecuencias que aportan energía a cualquiera de estas señales pertenecen a un intervalo acotado. De este modo, la física nos dice que todas las señales que podemos medir —bien con nuestros sentidos, bien a través de un aparato— son de banda limitada, y las matemáticas nos garantizan que, en consecuencia, estas señales se pueden someter, sin pérdida de información, a un proceso de discretización.

FIG. 1



Ejemplo de señal muestreada utilizando solo un número finito de muestras. Como se aprecia, la señal se recupera fielmente solo cerca del intervalo en el que se ha realizado el muestreo.

La fórmula del muestreo es también válida si se asume un ancho de banda superior al verdadero ancho de banda de la señal. Se sigue que puede usarse con toda tranquilidad si sobremuestreamos, es decir, si la frecuencia de muestreo es superior a la frecuencia de Nyquist. Es más, el uso de una frecuencia de muestreo superior a la mínima exigible tiene la ventaja de reducir el efecto de posibles errores de redondeo y, por tanto, proporciona un algoritmo más estable que el original. De hecho, el sobremuestreo es lo que facilita la digitalización de las señales, al permitir su recuperación, una vez cuantizadas, con errores dentro de los márgenes que impone el proceso de cuantización, que pueden ser tan estrechos como se desee. Por otra parte, si se intenta recuperar la señal con una frecuencia de muestreo inferior a la llamada frecuencia de Nyquist, no se tendrá éxito. Afortunadamente, en la inmensa mayoría de las aplicaciones se conocen los límites entre los que se mueven las frecuencias que intervienen en la conformación de las señales con las que se está tratando.

Supongamos que estamos interesados en estudiar un tipo concreto de señales físicas. Podría ser sonido, en cuyo caso cabría

plantearse, por ejemplo, grabar música en un CD sin pérdida de información, o emitir un programa de radio en directo. También podríamos recoger la actividad eléctrica del corazón en un electrocardiograma, o la actividad sísmica en un sismograma, o grabar un electroencefalograma utilizando un conjunto finito de electrodos, o un magnetoencefalograma. Podríamos someternos a una tomografía axial computarizada (TAC) o a una resonancia magnética nuclear, etc. En todos estos casos la física del problema en cuestión —y, a veces, la biología— nos informará sobre el ancho de banda de las señales implicadas. Así, el teorema del muestreo nos dirá con toda precisión cuál es la frecuencia de muestreo que nuestros aparatos deben utilizar, si es que no deseamos perder información relevante. De hecho, los aparatos que resuelven todos estos retos se han construido de acuerdo con las especificaciones impuestas por el teorema del muestreo, pues en otro caso no resultarían de utilidad práctica. Lo importante es que sabemos, en cada caso, cuáles son las pautas a seguir y, gracias a esto, la complicadísima información analógica que constantemente recibimos del mundo exterior puede reducirse a un conjunto finito de datos con los que podemos trabajar seguros de que no hemos obviado nada importante: el mundo entero puede ser digitalizado.

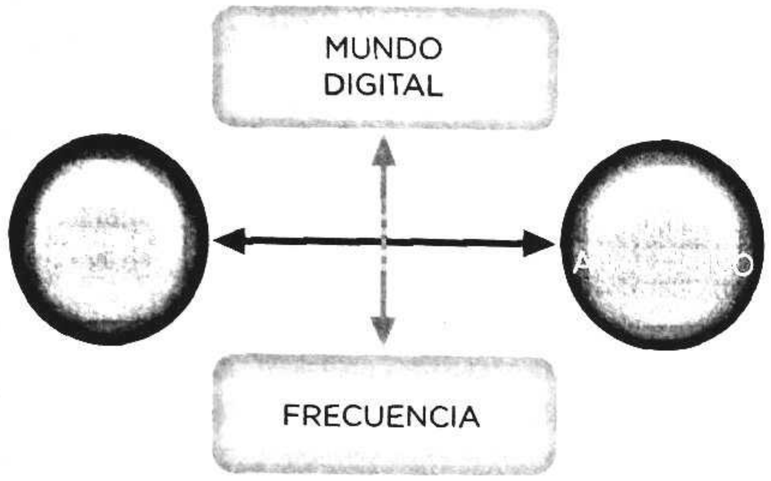
Asumamos momentáneamente, para centrarnos en un ejemplo concreto, que nuestro interés está en el análisis del electroencefalograma (EEG), aunque podríamos haber elegido cualquier otro tipo de sistema físico. Cada uno de los sensores con los que recogemos el EEG guarda su información en forma de un único vector de muestras, que tendrá un tamaño importante, pero no deja de ser un vector. En este contexto cabe, pues, realizar el análisis de Fourier propio de los vectores, análisis que se resume, en esencia, en el cálculo de la DFT de dicho vector. Ahora bien, el análisis de frecuencias que resulta relevante para nosotros no es el que de manera natural podemos aplicar a nuestro vector de muestras, como elemento de $\mathbb{C}^N$, sino que es el de las frecuencias analógicas de la señal eléctrica que hemos muestreado, pues son estas frecuencias las que tienen asociado un significado clínico, fisiológico, etc. Debemos responder, por tanto, a la siguiente pregunta fundamental: ¿hasta qué punto el uso de la DFT de los datos muestreados nos proporciona información fidedigna del comportamiento en frecuencias de la señal analógica que hemos muestreado? Si no tocamos para nada la DFT del vector de muestras, entonces esta mostrará un aspecto extraño, ininteligible. A primera vista, no tendrá nada que ver con la transformada de Fourier de la señal analógica. Nos dará la impresión de que el análisis de Fourier en dimensión finita es muy distinto del análisis de Fourier clásico, el cual sí se corresponde estrechamente con conceptos de la física y sí sabemos cómo interpretar. En consecuencia, podríamos pensar que la DFT no es de utilidad para las aplicaciones «reales». Afortunadamente, esta impresión inicial es solo apariencia.

Existen diversas herramientas matemáticas que permiten interpretar adecuadamente, en términos analógicos, los cálculos que se realizan en el mundo digital. Todos aquellos profesionales que están involucrados en la interpretación en frecuencias de datos tomados a partir de muestras del mundo analógico deben familiarizarse con estas técnicas matemáticas para evitar errores en sus cálculos y en la forma en la que estos deben interpretarse. Las herramientas concretas varían en función de la naturaleza de la señal analógica analizada —por ejemplo, si depende de una única o de varias variables— y cada experto se puede especializar en resolver los problemas propios de su área. Lo importante aquí es que la DFT, una vez tratada adecuadamente, nos informa sobre el contenido en frecuencias de la señal analógica. Además, los algoritmos en el mundo digital son, en comparación con los cálculos correspondientes en el mundo analógico, mucho más simples. De hecho, excepto en casos extraordinariamente excepcionales, resulta imposible realizar los cálculos en el mundo analógico. En contrapartida, la DFT siempre se puede calcular y, además, existen algoritmos que lo hacen a una velocidad extraordinaria, lo cual permite su uso incluso en casos en los que el volumen de datos es ingente. Que la DFT se pueda utilizar para estos fines es, ciertamente, un hecho del que todos nos beneficiamos cada día.

A pesar de que la DFT se puede utilizar para el cálculo aproximado de la transformada de Fourier analógica de la señal original, existen sin embargo algunas limitaciones en los cálculos que están vinculadas a la naturaleza finita de este proceso. En

DEL MUNDO ANALÓGICO AL DIGITAL

El teorema del muestreo permite pasar del mundo analógico al digital. La transformada de Fourier admite una versión en ambos mundos, para pasar del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias. Los cálculos siempre se hacen en el mundo digital. Las frecuencias de interés son, sin embargo, siempre las analógicas.



particular, al tomar muestras con cierta frecuencia de muestreo fijada de antemano, se limita el espectro de frecuencias que puede describirse. Si la señal no es de banda limitada, o si lo es pero tomamos una frecuencia de muestreo inferior a la de Nyquist, entonces no podremos recuperar la señal original, sino solo una aproximación, fenómeno que recibe el nombre de *aliasing*. Por otra parte, aun en el caso de que la señal original sea de banda limitada, y que hayamos muestreado con la frecuencia exigida por el teorema del muestreo analógico, este nos exige utilizar un conjunto infinito de muestras equiespaciadas, algo que es ciertamente inviable. Por tanto, la naturaleza finita de los cálculos que pueden realizarse implica la aparición de un cierto desajuste en los resultados, que recibe el nombre de «derramamiento espectral» y que, aunque es imposible de evitar completamente, sí que

podemos identificar e incluso suavizar, para poder posteriormente realizar las interpretaciones correctas de los cálculos.

El *aliasing* se puede controlar de dos modos: bien incrementando la frecuencia de muestreo, acercándonos lo máximo posible a la frecuencia de Nyquist, bien filtrando la señal original con un filtro de paso bajo que se adapte a nuestra velocidad de muestreo, y muestreando la señal filtrada. Ambas técnicas se pueden combinar, aunque casi siempre se recurre al sobremuestreo. De esta forma se incrementa el cociente señal-ruido (SNR, según sus siglas en inglés), que es una medida estándar de la calidad de la señal. Esta se calcula dividiendo la energía de la señal limpia por la energía del ruido introducido, por lo que a mayor coeficiente SNR, mejor es la calidad de la señal. El sobremuestreo también facilita una mejor estimación de la actividad en altas frecuencias de la señal analógica. Si queremos tener seguridad de que la DFT del vector de muestras describe fielmente el comportamiento en frecuencias de la señal original, el sobremuestreo es, con contadas excepciones, imprescindible.

El derramamiento espectral se debe a que, al imponer un número finito de muestras, sustituimos la señal a la que se podría aplicar el teorema del muestreo por la que resulta de multiplicar la señal original por una función $w_R(t)$ cuyo valor es 1 para $t \in [0,R]$ y 0 en el resto de casos. Esto puede dar lugar a que aparezca una discontinuidad de salto entre el principio y el final de la señal que vamos a muestrear, provocando, en el dominio de la frecuencia, el surgimiento de componentes de altas frecuencias que en realidad no están presentes en la señal original. De hecho, en el dominio de la frecuencia, el efecto del truncamiento se concreta en convolucionar la transformada de Fourier de la señal original con la transformada de Fourier de $w_R(t)$, que es la señal $W_R(u) = \sin(\pi Ru) / (\pi u)$. Esta convolución puede causar problemas de dos tipos, esencialmente. Puede suavizar y extender la señal, debido al lóbulo principal de la función seno cardinal,

$$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u},$$

y también puede que, como consecuencia de la convolución con los lóbulos menores de esta función, se formen oscilaciones en

altas frecuencias, que irán decayendo con el paso del tiempo. Este fenómeno se llama «rizado». Si la transformada de Fourier de la señal original es suave y no contiene impulsos, entonces el derramamiento espectral será mínimo y, en muchos casos, resultará casi imperceptible. Sin embargo, si la señal original es periódica o casi periódica, entonces los efectos del derramamiento espectral aparecerán claramente.

Para reducir el derramamiento espectral existen dos técnicas que, como en el caso del *aliasing*, pueden combinarse entre sí. La primera es tomar muestras de la señal en un rango más amplio, y tiene como consecuencia que el primer lóbulo de la función $W_R(t)$ se estrecha. Esto fuerza a que la convolución contra ella se parezca cada vez más a la convolución contra un impulso, que nos recupera la señal original. Además, los siguientes lóbulos disminuyen de tamaño muy rápidamente, lo cual tiene el efecto de disminuir drásticamente el tamaño de las oscilaciones en altas frecuencias. Otra técnica que se suele utilizar es el llamado «estrechamiento espectral», que consiste en multiplicar la función original $x(t)$ por una función —que llamamos «ventana»— $v(t)$ cuyo soporte esté contenido en $[0,R]$, que tome valores cercanos a 1 en la mayor parte del soporte, y luego decaiga con la mayor suavidad posible. En otras palabras, se trata de sustituir la ventana $w_R(t)$ por otra más suave —sin discontinuidades— que tenga el mismo soporte.

El precio a pagar es que algunas de las muestras que se toman cerca del borde del intervalo $[0,R]$ se verán perturbadas, pero la ganancia en el dominio de la frecuencia puede ser enorme, haciendo que casi desaparezcan las ondulaciones en altas frecuencias y, aun así, manteniendo bastante bien el comportamiento espectral de la señal en bajas frecuencias. De todas formas, se paga el precio de perder resolución espectral, es decir, se pierde cierta capacidad de distinguir el comportamiento en frecuencias cuando estas están excesivamente cerca unas de otras. Existen numerosas ventanas que se utilizan para el estrechamiento espectral, dependiendo del contexto en el que se trabaje, y existe también bastante literatura dedicada a describir las ventajas y los inconvenientes de cada una de ellas. Estas ventanas suelen

FIG. 2

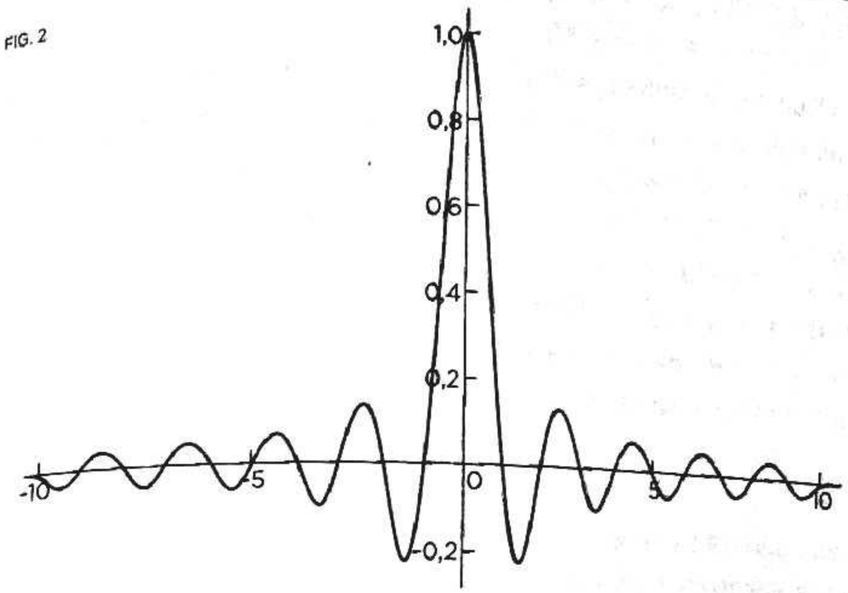
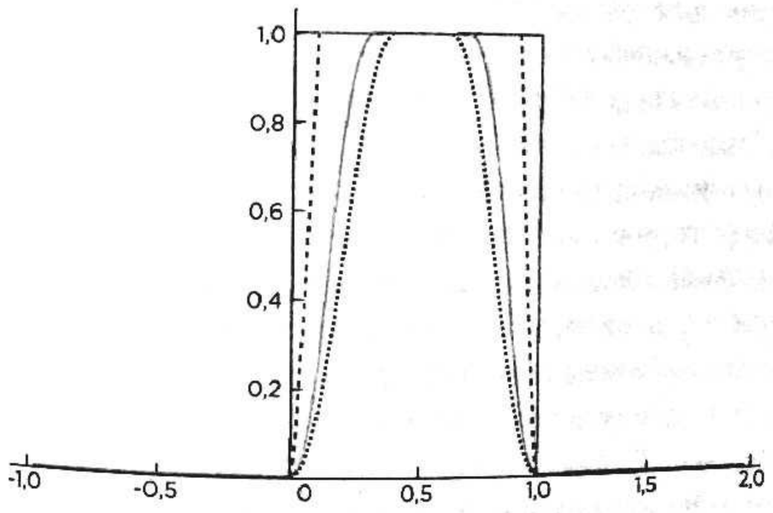


Gráfico de la función seno cardinal $\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$

Se observan diversas ondulaciones (o lóbulos) que, conforme nos alejamos del origen de coordenadas, decaen en amplitud. El lóbulo principal es el que está centrado en el origen.

FIG. 3



Varios ejemplos de ventanas $v(t)$ cuyo soporte común es el intervalo [0,1].

estar implementadas en el software científico que se utiliza en las distintas aplicaciones existentes.

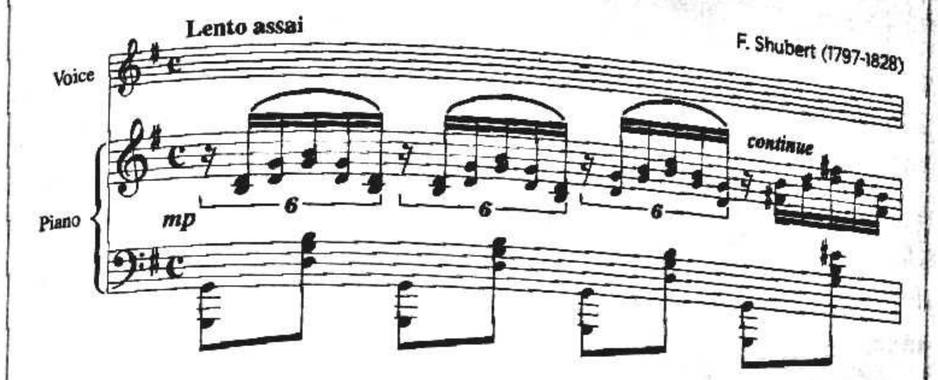
ANÁLISIS EN TIEMPO-FRECUENCIA

Las señales que aparecen en las distintas aplicaciones en física, ingeniería, medicina, etc., no se amoldan a ninguno de los modelos clásicos del análisis de Fourier pues, por ejemplo, no son periódicas ni decaen en el infinito. Es más, ni siquiera se extienden infinitamente en el tiempo, porque toda señal del mundo real tiene un principio y un final. Esto no significa que no podamos utilizar las técnicas que hemos descrito anteriormente, sino solo que ellas proporcionan un modelo que no es completamente fiel a la realidad, propiedad que es, en cualquier caso, característica de todos los modelos del mundo real. En muchísimos contextos aparecen señales que contienen oscilaciones rítmicas, y cuyo ritmo de oscilación es precisamente lo que nos interesa, aunque pueda variar con el tiempo. Es esta propiedad —el hecho de que con el transcurso del tiempo el contenido en frecuencias de las señales cambia— lo que impulsó el desarrollo de nuevas ramificaciones del análisis de Fourier. Los matemáticos pasaron de interesarse por una descripción en frecuencias estática para hacerlo por una descripción en frecuencias que fuera dependiente del tiempo a la que denominaron «análisis en tiempo-frecuencia» de las señales.

Se puede tomar de la música una analogía sencilla con lo que se pretende realizar. En efecto, cuando un músico lee una partitura, esta contiene la información completa de la pieza musical que se va a interpretar, y dicha información viene precisamente descompuesta en términos de tiempo-frecuencia. Es decir, la partitura fija con enorme precisión qué notas debe tocar el intérprete —lo cual es información en frecuencias— y cuándo debe tocarlas —lo cual es información temporal—. El problema del análisis en tiempo-frecuencia es, pues, intentar identificar, en intervalos muy cortos de tiempo, qué frecuencias son las que están efectivamente interviniendo en la composición de una señal dada. Y, si es posible, hacer esto en tiempo real, porque ello conllevará un enorme abanico de aplicaciones.

En este contexto, son muy importantes el análisis de Fourier «enventanado» y la teoría de «ondículas». Supongamos que nos

FIG. 4



Primeras notas del *Ave María* de Schubert. La partitura indica, de forma ordenada en el tiempo, qué notas y, por tanto, qué frecuencias intervienen en cada instante de tiempo.

interesa describir el comportamiento en frecuencias de la señal $f(t)$ cuando estamos cerca del instante de tiempo t_0. Entonces podemos proceder del siguiente modo: consideramos el producto $f(t)w(t-t_0)$, donde $w(t)$ es una función que se anula —o toma un valor verdaderamente despreciable— cuando nos alejamos del valor $t=0$ y vale aproximadamente 1 en un cierto intervalo que contiene al valor $t=0$ en su interior. Así, si calculamos la transformada de Fourier del producto $f(t)w(t-t_0)$ estaremos concentrando nuestra atención sobre el comportamiento en frecuencias de la señal $f(t)$ en un pequeño entorno del punto t_0. Es decir, dicha transformada nos revela el comportamiento en frecuencias de la señal cerca de t_0. Esto lo podremos hacer si la señal bajo consideración es estacionaria en el trozo de intervalo donde la ventana no se anula, que debe ser lo bastante pequeño como para garantizar este hecho, pero lo bastante grande como para detectar las oscilaciones de f. Este proceso se formaliza a través de la función de dos variables:

$$S\mathcal{F}(f)(t_0,\xi_0)=\mathcal{F}(f(t)w(t-t_0))(\xi_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-t_0)e^{-2\pi i\xi_0 t}dt,$$

que recibe el nombre de transformada de Fourier enventanada de la señal f.

Así, para representar las frecuencias que intervienen en la descripción de nuestra señal en cada instante de tiempo, dibujamos en el plano tiempo-frecuencia —que es el plano cuyo eje de abscisas representa el tiempo t y cuyo eje de ordenadas representa las frecuencias ξ medidas en hercios— el módulo de $\mathcal{SF}(f)(t,\xi)$, dando lugar a lo que se denomina un «espectrograma de f». A cada punto (t_0,ξ_0) del plano se le asigna un nivel de gris que refleja la amplitud de $|\mathcal{SF}(f)(t_0,\xi_0)|$. Asignamos al valor 0 el color negro y, a mayor amplitud, más claro pintamos el punto.

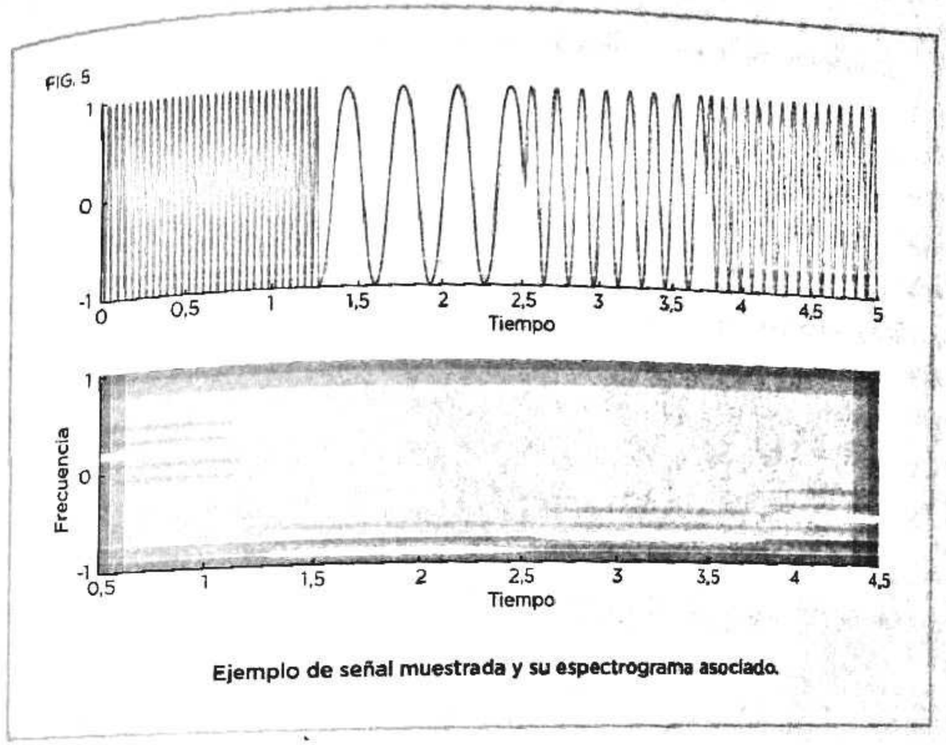
«El descubrimiento moderno de que, a escalas muy pequeñas, la materia se comporta de un modo muy diferente de cómo lo hace a escala humana es consecuencia natural del análisis de Fourier.»

— Barbara Burke Hubbard, en *The World According to Wavelets*, 1998.

Al igual que sucede con el análisis de Fourier clásico, estos cálculos no se pueden hacer, en general, para señales analógicas, por la razón de que no se dispone de una expresión analítica de la señal original, e incluso en el caso de tenerla, el cálculo de las integrales que aparecen no se conoce. Sin embargo, el análisis de Fourier en el mundo digital, con las manipulaciones pertinentes, se puede llevar a cabo con la DFT del vector de muestras de nuestra señal sin ninguna dificultad, siendo los correspondientes resultados representativos de lo que sucede en el mundo analógico.

Por ejemplo, en la figura 5 hemos realizado los cálculos con una señal que oscila con unas frecuencias bien definidas de 3, 6, 12 y 30 Hz en diferentes intervalos de tiempo, obteniendo un gráfico que refleja el comportamiento en tiempo-frecuencia de la señal.

El grosor de las líneas blancas que aparecen en la citada figura, así como la leve separación temporal entre unas líneas y otras revela que, con estos cálculos, se dispone de una precisión limitada para la definición exacta de las frecuencias implicadas, así como para su localización temporal. Esto se ve más claramente en la figura 5, donde se han hecho los cálculos con la señal



Ejemplo de señal muestrada y su espectrograma asociado.

$$\sin\left(\frac{40\pi}{3}t^2\right),$$

cuyo comportamiento en frecuencias varía gradualmente con el tiempo —conforme transcurre el tiempo, aumenta el valor de las frecuencias que intervienen en la señal—, y hemos hecho los cálculos con la transformada de Fourier enventanada con una ventana (digital) del tipo

$$w(n)=\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)}{2}$$

(ventana de Hamming) para diferentes tamaños temporales N de la ventana. Concretamente, se han tomado los valores N=150, 250, 350, 600 (de arriba abajo y de izquierda a derecha). Aunque la transformada de Fourier enventanada proporciona un importante avance respecto del análisis de Fourier clásico, aún persiste el problema de que los niveles de resolución fijados por cualquier ventana son los mismos en todo punto del plano tiempo-frecuencia, y esto podría dificultar el estudio de algunas señales que contengan información en frecuencias en rangos muy diversos,

FIG. 6

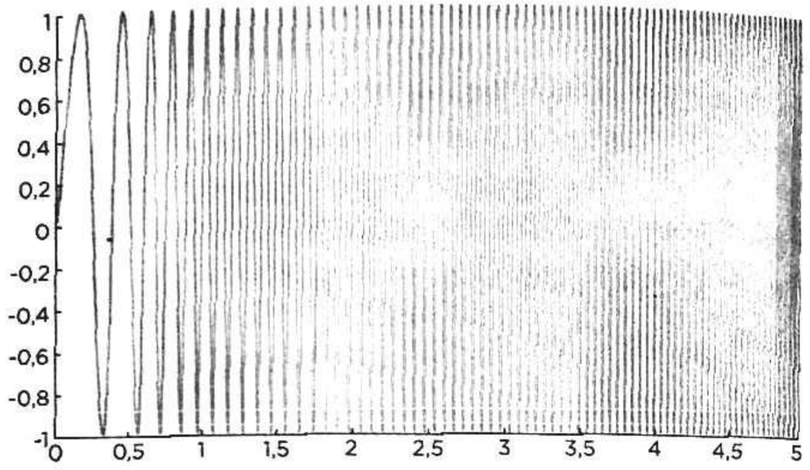
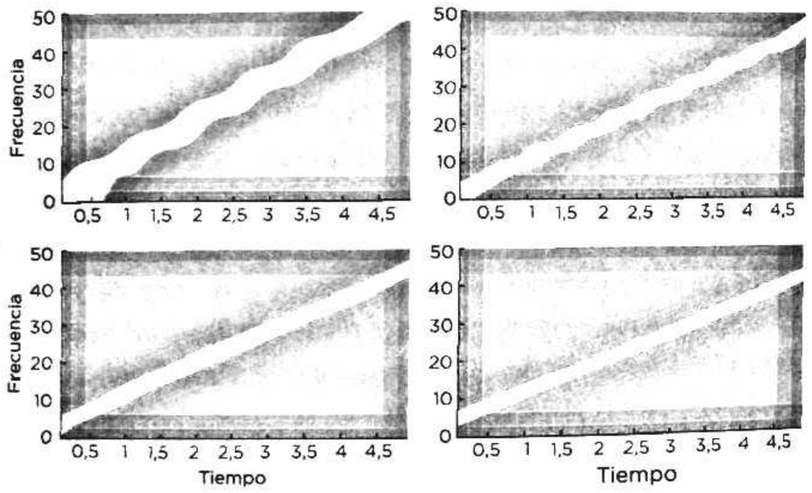


FIG. 7



La precisión del espectrograma *depende del tamaño* de la ventana que se usa.

y que esté presente en diferentes intervalos de tiempo. La teoría de ondículas resuelve este problema al sustituir el producto $w(t-t_0)e^{-2\pi i\xi_0 t}$ que aparece en la definición de $S\mathcal{F}(f)(t_0,\xi_0)$ por una función (ondícula) del tipo

$$\varphi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\varphi(\frac{t-b}{a})$$

que determina niveles de resolución diferentes en función del valor $a>0$ ($b\in\mathbb{R}$ nos informa sobre la localización temporal del análisis) y, simultáneamente, permite una cierta interpretación en términos de frecuencias.

Concretamente, se asume que la función $\varphi_{a,b}(t)$, que llamamos «ondícula madre», es una señal absolutamente integrable y de energía finita, que oscila con una frecuencia baja (en torno a 1 o 2 Hz) y está temporalmente concentrada en torno a $t=0$ —de modo que lejos de este punto se anula o tiene un valor despreciable—. Al considerar las versiones rescaladas y trasladadas $\varphi_{a,b}(t)$, el valor de a nos informa sobre su contenido en frecuencias y el valor de b sobre su localización temporal. La transformada wavelet asociada está dada, en tal caso, por la expresión

$$\mathcal{WT}(f)(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\varphi_{a,b}(t)}dt\,.$$

UNA APLICACIÓN IMPORTANTE: LA TOMOGRAFÍA AXIAL COMPUTARIZADA (TAC)

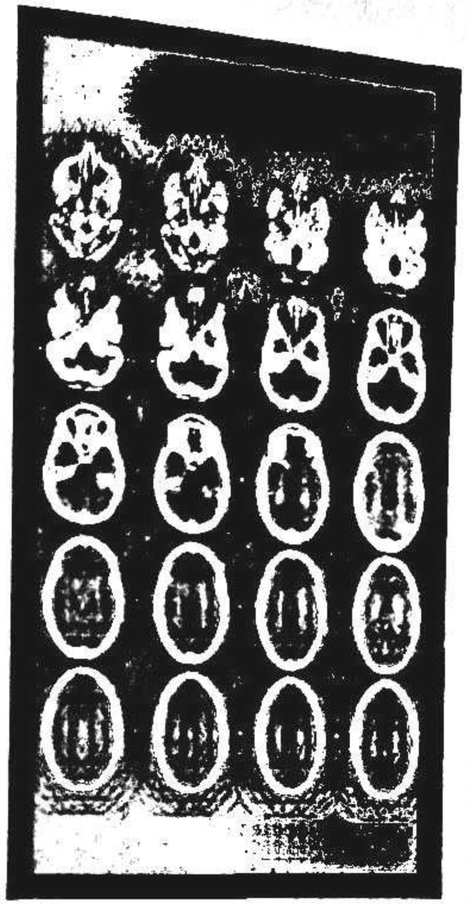
En 1979 se concedió conjuntamente el Premio Nobel de Medicina y Fisiología al físico surafricano Allan McLeod Cormack (1924-1998) y al ingeniero eléctrico británico Godfrey Newbold Hounsfield (1919-2004) por desarrollar ambos, de forma independiente, durante las décadas de 1960 y 1970, las bases teóricas de la tomografía axial computarizada (TAC), así como el primer prototipo de escáner basado en dicha técnica. Concretamente, Cormack había creado ciertos algoritmos matemáticos que, a partir de información obtenida a través de la emisión de rayos X que atraviesan un cuerpo, permitían la formación de una imagen que plasmaba el interior de dicho cuerpo, diferenciando unas partes de otras en función de su densidad. Esto permitiría conocer el estado del interior del cuerpo humano sin necesidad de una intervención quirúrgica. Es decir, facilitaba el diagnóstico clínico de forma no invasiva. Por su parte, Hounsfield, de forma simultánea e independiente, desarrolló el primer prototipo de escáner basado en la emisión de rayos X. Las matemáticas necesarias para explicar el funcionamiento de estos escáneres habían sido introducidas, por motivos completamente

ajenos a esta aplicación concreta, por el matemático austríaco Johann Radon (1887-1956) en 1917. Lo que hizo Cormack fue, en gran medida, redescubrir los resultados de Radon y aplicarlos al problema concreto que se había planteado.

Cuando forzamos que un haz de rayos X atraviese un cuerpo, una parte de la energía emitida es absorbida por dicho cuerpo, por lo que se produce un cambio en la intensidad del haz desde el momento de su emisión hasta el momento de su recepción, una vez ha atravesado el cuerpo. La cantidad de energía absorbida por el cuerpo depende de sus características físicas, básicamente, de su densidad.

Veamos un modelo sencillo de este fenómeno. Supongamos que el haz de rayos X está compuesto exclusivamente por fotones, y es monocromático y extraordinariamente fino, tanto que podremos asumir que no se ve afectado por los fenómenos de reflexión y difracción, es decir, los fotones no rebotan al no ser reflejados ni tampoco se dispersan a lo largo del medio mientras lo atraviesan, pues no difractan. Por tanto, cada fotón tiene la misma energía, para la cual se usa la notación E, y el haz se propaga con una frecuencia constante, lo que significa que el mismo número de fotones por segundo atraviesa cada centímetro del cuerpo, en el camino recorrido por el haz (que es siempre una línea recta). Si $N(x)$ representa el número de fotones por segundo que pasan a través de un punto x, entonces la intensidad del haz en el punto x viene dada por la expresión $I(x) = E \cdot N(x)$. Cuando el haz atraviesa una sustancia determinada, esta absorbe una parte de los fotones que la atraviesan. La proporción de fotones absorbida por cada sustancia cuando esta es atravesada por el haz es una cantidad que depende de la naturaleza física de la sustancia y recibe el nombre de «coeficiente de atenuación». En el caso del cuerpo humano, los huesos tienen un coeficiente de atenuación elevado si los comparamos con los tejidos blandos. Además, los coeficientes de atenuación sirven también, por ejemplo, para detectar si un determinado tejido es tumoral.

Si se usa la notación $A(x)$ para el coeficiente de atenuación del medio en el punto x, entonces, dado un incremento lineal Δx en la dirección del haz, la proporción de fotones absorbidos por



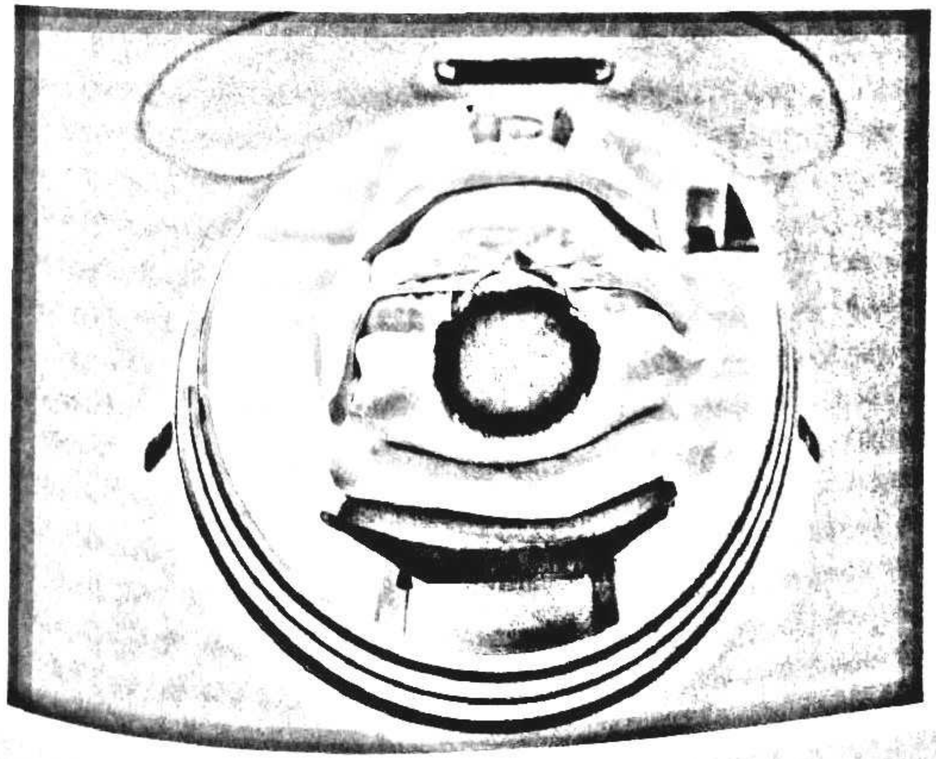


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA
Retrato del matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier.

FOTO SUPERIOR DERECHA
Conjunto de imágenes obtenidas mediante una tomografía axial computarizada, también conocida con las siglas TAC.

FOTO INFERIOR
Un paciente es sometido a una exploración en un moderno tomógrafo axial computarizado con fines diagnósticos.

el medio en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ es $A(x)\Delta x$ y, por tanto, el número de fotones absorbidos cada segundo en este trozo del medio es igual a $A(x)N(x)\Delta x$. Se sigue que en dicho intervalo la intensidad del haz varía de acuerdo con la expresión

$$\Delta I = -E \cdot A(x)N(x)\Delta x = -A(x)I(x)\Delta x,$$

lo que nos conduce, al hacer $\Delta x \to 0$, a la ecuación diferencial $I'(x) = -A(x)I(x)$, que recibe el nombre de ley de Beer. Esta ecuación se puede reescribir como

$$\ln\left(\frac{I(x_0)}{I(x_1)}\right) = \int_{[x_0,x_1]} A,$$

donde el símbolo integral representa la integral de la función (de varias variables) A sobre el segmento de recta $[x_0, x_1]$. Esta ecuación dice que si se mide la intensidad del haz de rayos X antes y después de atravesar el cuerpo, entonces puede conocerse la integral

$$\int_{[x_0,x_1]} A$$

aun sin conocer la función $A(x)$, y que esto puede hacerse para cualquier segmento $[x_0, x_1]$. Pues bien, resulta que esta información basta para recuperar la función $A(x)$, y que un paso importante en el algoritmo es utilizar la transformada de Fourier. Obviamente, si se conoce $A(x)$ en todo punto, entonces podrá describirse con bastante precisión la composición interna del cuerpo que estamos estudiando, y ese es el objetivo.

A nivel práctico, toda la experiencia se realiza en el espacio ordinario, por lo que la función de atenuación depende de tres variables. Los tomógrafos computarizados están diseñados para emitir sus haces de radiación en un mismo plano que puede desplazarse posteriormente —o desplazarse el objeto de estudio— a través de un eje perpendicular a él. Así, se secciona virtualmente el objeto en una secuencia de planos paralelos que están muy próximos unos a otros, y el aparato resuelve el problema del cálculo de

la función de atenuación en cada uno de estos planos. Esto reduce a 2 la dimensión del problema, ya que la función de atenuación, restringida a un plano fijo, se puede interpretar como una función de dos variables. Una vez se haya hecho esto para una cantidad apropiada de planos paralelos, se puede reconstruir globalmente la función de atenuación, lo cual nos permite a su vez construir una imagen tridimensional del interior del objeto en la que se distingan sus diferentes texturas.

En términos formales el problema que debe resolverse es, pues, el siguiente: dada una función de dos variables $A(x,y)$ —que podemos suponer idénticamente nula fuera de la caja $[-R,R]\times[-R,R]$ para cierto valor $R>0$—, si se conoce el valor de la integral $\int_L A$ para toda recta L del plano, ¿puede recuperarse la función $A(x,y)$? Por suerte, la respuesta a esta cuestión es positiva.

Cada recta del plano queda descrita de forma unívoca a partir de su distancia al origen de coordenadas —para la cual se usa la notación t— y el ángulo $\theta \in [0,2\pi[$ que forma su vector normal con el eje de abscisas. Así, dados estos valores, la única recta que los satisface está parametrizada como

$$\ell_{t,\theta} = \{(t\cos\theta - s\sin\theta, t\sin\theta + s\cos\theta) : s \in \mathbb{R}\}.$$

La transformada de Radon de la función $A(x,y)$ es la función

$$\mathcal{R}(A)(t,\theta) = \int_{\ell_{t,\theta}} A = \int_{-\infty}^{\infty} A(t\cos\theta - s\sin\theta, t\sin\theta + s\cos\theta)\,ds.$$

En 1917, Radon demostró que si conocemos $\mathcal{R}(A)(t,\theta)$ para todos los valores de los parámetros $(t,\theta) \in [0,\infty)\times[0,2\pi)$, entonces conocemos la función $A(x,y)$, y proporcionó un algoritmo para su recuperación. Existen varias pruebas de este hecho fundamental. Quizá la más importante se basa en la identidad

$$\mathcal{F}_2(A)(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) = \mathcal{F}(R_\theta(A))(\xi)$$

que relaciona la transformada de Fourier (bidimensional) de la función de atenuación A con la transformada de Fourier (unidi-

mensional) de la función $\mathcal{R}_\theta(A)(t) = \mathcal{R}(A)(t,\theta)$. Por supuesto, en la práctica surgen diversas complicaciones derivadas del hecho de que solo podemos tomar un conjunto finito de medidas y, por tanto, debemos someternos a un proceso de digitalización. Es más, debido a los posibles efectos secundarios de la radiación, es muy importante enviar el menor número posible de haces contra el paciente. Afortunadamente, el análisis de Fourier y, en particular, las versiones en dimensiones uno y dos del teorema del muestreo, así como el uso de la DFT y los filtros de ondas, proporcionan las herramientas adecuadas para resolver este importante escollo. Las matemáticas que se derivan del trabajo iniciado por Fourier en 1807 ayudan, de este modo, a salvar vidas.

Lecturas recomendadas

ALMIRA, J.M., *Fourier. Un debate acalorado*, Madrid, Nivola, 2014.

—: *Norbert Wiener. Un matemático entre ingenieros*, Madrid, Nivola, 2009.

—: *Matemáticas para la recuperación de señales. Una introducción*, Granada, Grupo Ed. Universitario, 2005.

BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, México, Losada, 2010.

BOCHNER, S., *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Madrid, Alianza Editorial, 1991.

CAÑADA, A., *Series de Fourier y aplicaciones. Un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos*, Madrid, Pirámide, 2002.

DIEUDONNÉ, J., *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Madrid, Alianza Editorial, 1989.

FEYNMAN, R.P., *El carácter de la ley física*, Barcelona, Tusquets, 2005.

GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Madrid, Alianza Editorial, 1984.

KÁDOMTSEV, B., RYDNIK, V., *Ondas en nuestro alrededor*, Moscú, Mir, 1984.

KLINE, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial, 2012.

LAKATOS, I., *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Madrid, Alianza Editorial, 1986.

SKLAR, L., *Filosofía de la física*, Madrid, Alianza Editorial, 1994.

STEWART, I., *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*, Barcelona, Crítica, 2012.

ZAMORA CARRANZA, M., *Fuego, calor y energía*, Sevilla, Abecedario, 2007.

Índice

Academia de Ciencias de París 8, 19, 47
acústica 36, 123
Alembert, Jean le Rond d' 19, 31, 32, 34,36-39, 80, 82
aliasing 138,139
análisis
  de Fourier 7-9, 13, 38, 55, 72, 93, 94, 109, 111, 123, 125, 126, 131, 137, 136, 142, 144, 145, 152
  en tiempo-frecuencia 9, 142
  funcional 9, 77, 124
  matemático 7, 9, 18, 27, 29, 73, 96, 101, 124

Bernoulli, Daniel 9, 34, 36, 38-40, 61, 73, 80, 101
Biot, Jean-Baptiste 59-62, 81, 83, 84, 86, 87, 118
Bonaparte, Napoleón 10, 13, 17, 19, 46, 49, 50-56, 107-109

cambio de coordenadas 98, 99
Carnot, Nicolas Léonard Sadi 108, 109, 114
Cauchy, Augustin-Louis 92, 93, 95, 117
coeficientes de Fourier 42, 75, 101, 105, 106, 124-127, 130, 132, 133
condiciones
  de frontera 8, 40, 66, 67, 79
  iniciales 8, 63, 102
convergencia 9, 73, 76, 82, 101, 124, 125, 130, 131
convolución 101, 125, 126, 139, 140
coordenadas
  cartesianas 40, 98
  cilíndricas 40, 77, 98
  esféricas 99, 100

derramamiento espectral 138-140
desarrollo de Taylor 34, 38, 70, 71, 76, 101
Descripción de Egipto 13, 53, 82
Dieudonné, Jean 86
digitalización 132, 135, 152
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 9, 109, 110
discretización 132, 134
distribuciones 126, 134

dominio
de la frecuencia 139, 140
del tiempo 126, 131, 138

ecuación
de ondas 32, 34-36, 39, 40, 61
del calor 29, 64, 66, 78, 79, 81, 83, 97, 100, 104, 123
en derivadas parciales 40, 98
ecuaciones
algebraicas 20, 116
de la física matemática 67, 77
efecto invernadero 113
Egipto, campaña de 10, 13, 46, 54, 56, 112, 118
electrocardiograma 129, 136
electroencefalograma (EEG) 129, 136
Escuela Normal Superior 9, 13, 26
Escuela Politécnica 9, 13, 46, 54, 112, 114, 118
espacio vectorial 67, 129, 130
Euler, Leonhard 10, 26, 30, 34, 36, 39, 40, 42, 71, 75, 76, 78, 80, 105

función periódica 8, 36, 37, 133

Hardy, Godfrey Harold 86

Jacobi, Carl Gustav Jakov 86, 117

Kotelnikov, Vladimir 10, 134

Lagrange, Joseph-Louis de 10, 20, 26, 32, 40, 41, 43, 46, 56, 60, 61, 78-82, 91, 116
Laplace, Pierre Simon de 19, 26, 28, 43, 56, 72, 80, 81-83, 87, 91, 97, 117, 118
Lebesgue, Henri 72
Legendre, Adrien-Marie 18-20, 81, 91, 92, 116, 117
lema de Schwarz 28

mecánica racional 8, 94
método de separación de variables 8, 36, 65, 67, 77, 78, 96, 100, 102, 103
Monge, Gaspard 26, 43, 46, 50, 52, 53, 56, 91

Newton, Isaac 20, 21, 59, 94, 96, 116

ondículas 9, 142, 146

Poisson, Siméon Denis 46, 77, 83-88, 91, 92, 117
polinomios ortogonales 130
principio de superposición, 66, 72, 79
problema
de la cuerda vibrante 8, 30, 33, 34, 37, 40, 61, 79, 80, 101
de valores propios 67
producto escalar 128-131
propiedades de paridad 74

Revolución francesa 9, 17, 22

señal analógica 131, 132, 137, 139
serie
de Fourier 73, 75, 76, 101, 103, 109, 110, 125, 133
de Fourier generalizada 130
Shannon, Claude 10, 134
síntesis 124, 126
sobremuestreo 135, 139
suma parcial 109

telecomunicaciones 7
temperatura 27, 56-58, 61-65, 78, 84, 100, 102, 106, 113
teorema
de convolución 125, 126
de Dirichlet 109, 124
de Parseval 74, 124
del muestreo 10, 132, 134, 136, 138, 139, 152
integral de Fourier 93
teoría
analítica del calor 9, 10, 13, 55, 84, 86, 89-119, 130
termodinámica 58, 59, 62, 114
transferencia de calor 57, 58
transformada
de Fourier 7, 105, 106, 111, 126, 133, 134, 137-140, 143, 145, 150, 151
de Fourier enventanada 143, 145
de Radon 10, 151
discreta de Fourier (DFT) 10, 132
tomografía axial computarizada (TAC) 10, 136, 147, 149

Whittaker, Edmund Taylor 134